

1. Έστω η απεικόνιση του R_+^* στον εαυτό του, με
τύπο: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Να υπολογιστούν τα $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$ και $f(2)$.

Είναι η απεικόνιση 1-1; Είναι μονότονη στο R_+^* ;

Είναι "επί";

ΛΥΣΗ

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{17}{4} \quad f(1) = 2, \quad f(2) = \frac{17}{4}$$

Αφού $f(\frac{1}{2}) = f(2)$ δεν είναι 1-1 γιατί θα έπρεπε απ' τον
 $f(a) = f(b)$ να έχουμε πάντα $a=b$

Για τη μονοτονία θεωρούμε δύο τυχόντα στοιχεία του R_+^*
τα $\frac{1}{2}$, και 1. Τότε $\frac{f(1)-f(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}} = -\frac{9}{2}$ ενώ για τα στοιχεία

1, 2 έχουμε $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{9}{4}$. Δηλ. ο λόγος μεταβολής δεν

διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R_+^* άρα δεν είναι μονότονη, στο R_+^* .
Για να είναι "επί" στο R_+^* πρέπει για με R_+^* η εξίσωση $f(x) = \mu$
να έχει πάντα λύση. Η εξίσωση αυτή γράφεται: $x^2 + \frac{1}{x^2} = \mu$ ή
 $x^4 - \mu x^2 + 1 = 0$. Είναι διτετράγωνη με επιλύουσα την $y^2 - \mu y + 1 = 0$.
Αυτή όμως δεν δέχεται πάντα λύση, γιατί η διακρίνουσα της
 $\Delta = \mu^2 - 4$ είναι αρνητική στο $(0, 2)$. Άρα η $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ δεν είναι
"επί" στο R_+^* (π.χ. ο αριθμός 1 δεν είναι ακόμα κανενός
 $x \in R_+^*$ μέσω της $f(x)$).

-50-

2.Έστω $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : f(0)=4$

$$f(n+1)-f(n)=f(n) \quad \forall n \geq 0.$$

1. Να βρεθούν τα $f(1), f(2), f(3), f(4)$.
2. Να υπολογιστεί το $f(n)$ συναρτήσει του n .
3. Να βρεθεί το $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$
4. Να δειχτεί $f(n) \cdot f(m) = 4f(n+m)$

(Bacc. Aix-en-Provence)

Λ Υ Σ Η

1. $f(n+1)=2f(n)$ άρα $f(1)=8$ $f(2)=16$ $f(3)=32$ $f(4)=64$
2. $f(n)=2f(n-1)$ Με πολ/σμό κατά μέλη:
 $f(n-1)=2f(n-2)$ $f(n)=2^n \cdot f(0)=2^n \cdot 4=2^{n+2}$

 $f(2)=2f(1)$
 $f(1)=2f(0)$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+2} = +\infty$
4. $f(n) \cdot f(m) = 2^{n+2} \cdot 2^{m+2} = 2^{n+m+4} = 2^2 \cdot 2^{n+m+2} = 4f(n+m)$

3.

Για Γ' Λυκείου

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x^3 - 2x \cdot 15$.

Να υπολογιστεί το $f(x)-f(2)$, και να παραγοντοποιηθεί η διαφορά αυτή.

-51-

Να δείχτε ότι αν $|x-2| < \frac{7}{5}$ έχουμε $|x| < \frac{17}{5}$ και

$|f(x) - f(2)| \leq 25|x-2|$. Πα συμπεράνετε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x=2$

(Classes de premiere C, D et E)

Λ Υ Σ Η

$$f(x) - f(2) = 5x^2 - 2x - 16 = 5(x-2)\left(x + \frac{8}{5}\right)$$

$$|x-2| < \frac{7}{5} \Rightarrow -\frac{7}{5} < x-2 < \frac{7}{5} \quad \text{ή} \quad \frac{3}{5} < x < \frac{17}{5} \quad \text{δηλ.} \quad |x| < \frac{17}{5}$$

Επίσης $|f(x) - f(2)| = 5|x-2| \cdot \left|x + \frac{8}{5}\right|$ και επειδή

$$\left|x + \frac{8}{5}\right| \leq |x| + \frac{8}{5} < \frac{17}{5} + \frac{8}{5} = 5 \quad \text{έχω τελικά}$$

$$|f(x) - f(2)| \leq 25|x-2| \quad (3) \quad \text{Εστω λοιπόν ένας } \varepsilon > 0$$

$$\text{να } 25|x-2| < \varepsilon \quad \text{αν } |x-2| < \frac{\varepsilon}{25} \quad (4)$$

Εστω ένας $\delta > 0$, μικρότερος απ' τους αριθμούς $\frac{\varepsilon}{25}$ και $\frac{7}{5}$
 δηλ. $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{25}, \frac{7}{5}\right\}$

Αν $|x-2| < \delta$ οι τύποι (3) και (4) γίνονται

$$|f(x) - f(2)| \leq 25|x-2| < \varepsilon$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ ώστε για

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon \quad \text{Αρα η } f(x) \text{ συνεχής στο } x=2$$

4.

Δίνονται τα σύνολα $A = \{-1, 0, 1\}$ και $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
 Ονομάζουμε F το σύνολο των απεικονίσεων f απ' το A στο B
 που είναι 1-1 και πληρούν την:

$$\forall x \in A, \quad f(x) + f(-x) = 2$$

Να καθοριστεί το σύνολο F με τη βοήθεια του γραφήματος
 κάθε στοιχείου του.

(Classes de première)

ΛΥΣΗ

Απ' τη δοθείσα σχέση προκύπτει για $x=0$: $f(0) + f(0) = 2 \Rightarrow f(0) = 1$
 Λαμβάνοντας υπ' όψη, ότι η απεικόνιση f θα είναι 1-1
 σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

$f(1)$	$f(-1)$	$f \in F$
-2	4	οχι: $4 \notin B$
-1	3	ναι
0	2	ναι
1	1	οχι: η f δεν είναι 1-1
2	0	ναι
3	-1	ναι

Το σύνολο λοιπόν F αποτελείται από 4 στοιχεία των
 οποίων τα γραφήματα είναι:

$$\begin{aligned} &\{(1, -1), (0, 1), (-1, 3)\} && \{(1, 0), (0, 1), (-1, 2)\} \\ &\{(1, 2), (0, 1), (-1, 0)\} && \{(1, 3), (0, 1), (-1, -1)\} \end{aligned}$$

-53-

Μια απεικόνιση του \mathbb{R}^2 στο \mathbb{R} η g πληρεί τις σχέσεις
 $g(2,1)=g(-2,2)$ και $g(3,2)=1$. Επί πλέον είναι γραμμική.

Να υπολογιστεί η $g(x,y)$ συνάρτηση των x και y

(Classes de premiere C,D,I)

Λ Υ Σ Η

Γραμμική σχέση σημαίνει: $g(x,y)=g(x,0)+g(0,y)$

και $g(x,y)=xg(1,0)+yg(0,1)$ (1) και $-g(x,y)=g(-x,-y)$

Άρα πρέπει να προσδιορίσουμε τα $g(1,0)$ και $g(0,1)$

Έχουμε $g(2,1)=g(-2,2) \Rightarrow g(2,1)-g(-2,2)=0$

$g(4,-1)=0$ και λόγω της (1) $4g(1,0)-g(0,1)=0$ (2)

Η άλλη δοθείσα γράφεται $3g(1,0)+2g(0,1)=1$ (3)

Απ' τις (2) και (3) έχω $g(1,0)=\frac{1}{11}$ $g(0,1)=\frac{4}{11}$ $g(x,y)=\frac{1}{11}$

$(x+4y)$

Θεωρούμε την απεικόνιση του \mathbb{N} στο \mathbb{Z} που ορίζεται:

$\{x \in \mathbb{N} : f(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x \text{ είναι άρτιος}$

$\{x \in \mathbb{N} : f(x) = -\frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x \text{ είναι περιττός}$

1. Να υπολογιστούν τα $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

-54-

2. Να δειχτεί ότι η απεικόνιση $f(x)$ είναι 1-1
3. Να βρεθεί η τιμή του $f(x)+f(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{H}$
4. Έστω η ένας φυσικός αριθμός. Να υπολογιστεί το άθροισμα: $S=f(0)+f(1)+\dots+f(\eta)$

Λ Υ Σ Η

$$1. f(0)=0 \quad f(1)=-1 \quad f(2)=1 \quad f(3)=-2 \quad f(4)=2$$

2. Αν $y \in \mathbb{Z}$ και είναι y θετικός ή μηδέν τότε το y αυτό, είναι εικόνα ενός μόνου $x \in \mathbb{H}$, γιατί η εξίσωση $\frac{x}{2} = y$ με άγνωστο το x έχει μία μόνο λύση.

Αν το y είναι αρνητικός τότε αυτό είναι εικόνα του x , που πληρεί την εξίσωση $-\frac{x+1}{2} = y$ που έχει τη μοναδική λύση που ανήκει στο \mathbb{N} $x = -2y-1$.

Αρα σε κάθε περίπτωση το $y \in \mathbb{Z}$ είναι εικόνα ενός μόνο στοιχείου του \mathbb{H} . Δηλ. η f είναι 1-1

$$3. f(x)+f(x+1) = \frac{x}{2} - \frac{(x+1)+1}{2} = -1 \quad \text{αν } x \text{ άρτιος}$$

$$\text{και } f(x)+f(x+1) = -\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2} = 0 \quad \text{αν } x \text{ περιττός}$$

$$4. \text{ Το } S = [f(1)+f(2)] + [f(3)+f(4)] + \dots + [f(\eta-1)+f(\eta)]$$

η είναι άρτιος οπότε απ' το προηγούμενο κάθε αγκύλη είναι μηδέν άρα $S=0$

$$\text{Αν το } \eta \text{ είναι περιττός } S = [f(1)+f(2)] + [f(3)+f(4)] + \dots + [f(\eta-2)+f(\eta-1)] + f(\eta) = f(\eta) = -\frac{\eta+1}{2}$$

Λ.Π.

Έστω f η απεικόνιση του $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(n) = \frac{1}{n(n+1)}$

1. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f
2. Να δείχτε ότι $f(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ *
3. Να υπολογιστεί $f(1)+f(2)$, $f(1)+f(2)+f(3)$, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$

Εστω ότι $f(1)+f(2)+\dots+f(n) = \frac{n}{n+1}$. Ποιό είναι το όριο του αθροίσματος αυτού όταν $n \rightarrow +\infty$;

(Bacc.A.Lille)

Λ Υ Σ Η

$$1. \text{ Είναι } f(n+1) - f(n) = \left(\frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{n(n+1)(n+2)} < 0 \text{ άρα}$$

είναι γνησίως φθίνουσα.

$$2. f(n) = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$3. f(1)+f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \quad f(1)+f(2)+f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$f(1)+f(2)+\dots+f(n) = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \text{ άρα το όριο του}$$

αθροίσματος αυτού είναι το 1.

8.

Εστω η εξίσωση $\frac{2x+3}{x-1} = \mu$, $\mu, x \in \mathbb{R}$. Να δειχτεί ότι για κάθε τιμή του μ , εκτός από μία η οποία να προσδιοριστεί αυτή η εξίσωση δέχεται μία μόνο λύση την οποία να υπολογίσετε συναρτήσει του μ . Απ'αυτά να εξαχθεί ότι η

$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ είναι 1-1 του $\mathbb{R} - \{1\}$ "επί" του $\mathbb{R} - \{2\}$.
Ποιά είναι η αντίστροφη της f ;

(Classes de première C,D,E.)

Λ Υ Σ Η

Είναι $2x+3=\mu(x-1)$ ή $(\mu-2)x=\mu+3$ για $x \neq 1$

Αν $\mu \neq 2$ υπάρχει η μοναδική λύση $x = \frac{\mu+3}{\mu-2}$

Αν $\mu = 2$ δεν υπάρχει λύση

Αφού ο $f(x)$ μπορεί πάντα να προσδιοριστεί εκτός αν $x=1$,

και είναι κάποιος πραγματικός αριθμός εκτός του 2, η

$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ είναι συνάρτηση "επί" του $\mathbb{R} - \{2\}$

με πεδίο ορισμού το $D = \mathbb{R} - \{1\}$. Επίσης κάθε $\mu \in \mathbb{R} - \{2\}$

είναι εικόνα ενός μόνου στοιχείου $\mathbb{R} - \{1\}$ του $x = \frac{\mu+3}{\mu-2}$

Άρα είναι 1-1

$$\text{Η } f(x) = \frac{x+3}{x-2} \text{ του } R - \{2\} \rightarrow R - \{1\}$$

9.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

1. Να εκφραστούν οι συναρτήσεις $h = g \circ f$ και $l = f \circ g$ και να βρεθεί το πεδίο ορισμού τους.
2. Να εξεταστεί η συνέχεια των h και l (Γ' Λυκείου)

(Bacc. A, Besancon)

Λ Υ Σ Η

$$1. h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2$$

$$D_h = D_f = R - \{-2\}$$

$$l(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)}{\frac{x^2}{2} + 4} \quad \text{με } D_l = R$$

2. Απλή

10

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται:

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ 2f(n)=f(n-1)+5 \end{cases} \quad \text{και έστω η } g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{με } g(n)=f(n)-5$$

1. Να δειχτεί ότι $g(n)=\frac{1}{2}g(n-1)$
2. Να εκφραστεί το $g(n)$ συναρτήσει του n .
3. Να βρεθεί το $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)$ του $n \rightarrow +\infty$
Ομοίως για την $f(n)$

(Bacc. A, Montellier)

Λ Υ Σ Η

1. $2g(n)=2f(n)-10=f(n-1)+9-10=f(n-1)-5=g(n-1)$
δηλ. $g(n)=\frac{1}{2}g(n-1)$ με $g(0)=f(0)-5=-3$
2. $g(n)=\frac{1}{2}g(n-1)$ Με πολλαπλασιασμό έχω
 $g(n-1)=\frac{1}{2}g(n-2)$ $g(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n g(0)=-3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$
.....
 $g(1)=\frac{1}{2}g(0)$

Αρα $f(n)=g(n)+5=-3\left(\frac{1}{2}\right)^n+5$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)=0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)=5$

Έστω $y=f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$

- α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της
- β. Να βρεθεί το $f(x)+f(-x)$ και να ερμηνευτεί
- γ. Να βρεθεί αν υπάρχει η αντίστροφη της f

(Βασιλ. Ε, Βεσάνζον)

Λ Υ Σ Η

1. Πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{0\}$. Είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$

Στα άκρα του πεδίου ορισμού έχουμε την ακόλουθη συμπεριφορά.

$$\begin{array}{lll} x \rightarrow -\infty & e^x \rightarrow 0^+ & \Rightarrow f(x) \rightarrow 0^- \\ x \rightarrow 0^- & e^x \rightarrow 1^- & \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 0^+ & e^x \rightarrow 1^+ & \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty & e^x \rightarrow +\infty & \Rightarrow f(x) \rightarrow 1 \end{array}$$

2. $f(x)+f(-x)=\frac{e^x}{e^x-1}+\frac{1}{1-e^x}=1$ Αυτό γραφικά σημαίνει ότι τα σημεία $(x, f(x))$ και $(-x, f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $I(0, 1)$

3. Από την $y=\frac{e^x}{e^x-1}$ $e^x(y-1)=y$ $x=\log\frac{y}{y-1}$

$$\eta \ f^{-1}(x)=\log\frac{x}{x-1}$$

Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$ είναι το $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ αφού πρέπει $\frac{x}{x-1} > 0$ και $x \neq 1$

Για Γ' Λυκείου

12.

1. Να βρεθεί το όριο L της $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}$ όταν $x \rightarrow 0$

2. Εστω $f_1(x) = \begin{cases} f_1(x) = f(x) & \text{για } x \neq 0 \\ f_1(0) = L & \text{για } x = 0 \end{cases}$

Να εξεταστεί αν είναι η $f_1(x)$ συνεχής (και παραγωγίσιμος στο $x=0$)

(Bacc. D. Amiens)

Λ Υ Σ Η

1. Για $x \neq 0$ η $f(x)$ γράφεται

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(1+x^2+1)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

όρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L = 0$

2. Τώρα $f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x} & \text{για } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

-62-

Λ Υ Σ Η

1. Έστω $(\alpha, \beta) \subset (-\infty, 0]$. Είναι $f(\alpha) = \alpha^2 - 1$, $f(\beta) = \beta^2 - 1$
 και $f(\alpha) - f(\beta) = \alpha^2 - \beta^2$ και $\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta$

$$\alpha - \beta$$

Έχουμε $\alpha + \beta \leq 0$ διότι $\alpha \leq 0$ και $\beta \leq 0$ Επίσης
 $\alpha + \beta < 0$ γιατί $\alpha \neq \beta$ Άρα

$$\forall (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}_- : \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} < 0 \text{ δηλ. η } f(x) \text{ είναι}$$

γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R}_- .

Επίσης έστω $(\alpha, \beta) \subset (0, +\infty)$

$$f(\alpha) - f(\beta) = \frac{\alpha+1}{\alpha} - \frac{\beta+1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{-(\alpha-\beta)}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = -\frac{1}{\alpha\beta} < 0$$

ομοίως γν. φθίνουσα στο $(0, \infty)$

Αν η $f(x)$ ήταν γν. φθίνουσα στο \mathbb{R} θα έπρεπε $\forall (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} < 0$$

$$\alpha - \beta$$

Ομως για $\alpha = -1$ και $\beta = +1$ έχουμε $\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = 1$

$$\alpha - \beta$$

Άρα δεν είναι γν. φθίνουσα στο \mathbb{R}

2. Απ' τον ορισμό της συνάρτησης η εξίσωση πρέπει να μελετηθεί στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$

$$\text{Στο } (-\infty, 0] \text{ γίνεται } x^2 - 1 = 1 \quad x = -\sqrt{2}$$

$$\text{Στο } (0, \infty) \text{ γράφεται } \frac{x+1}{x} = 1 \text{ που δεν έχει λύση.}$$

x

-61-

Αυτή είναι συνεχής για $x \neq 0$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, και συνεχής στο 0, αφού $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f_1(0)$

Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

Για την παράγωγο στο 0 εξετάζω το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

$$\text{Είναι } \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

13.

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \forall x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x} & \forall x > 0 \end{cases}$

1. Να δειχτεί ότι είναι αυστηρώς φθίνουσα στα $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$. Είναι φθίνουσα σ' όλο το \mathbb{R} ;
2. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1$
3. Να διερευνηθεί η εξίσωση $f(x) = \mu$ για τα διάφορα μ .
4. Είναι η $f, 1-1$; Ποιό είναι το πεδίο τιμών της;
5. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου μ , για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = \mu$ υέχεται δύο αντίθετες ρίζες.

(Classes de premiere A, B)

-41-
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

38. Έστω στο Καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία $A(1,0)$, $B(3/2, +1/2)$, $\Gamma(3/2, -1/2)$ και η ευθεία D με εξίσωση $x=1$.

1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Δ ώστε $\overline{\Gamma\Delta} = \overline{AB}$. Τι είναι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$;

2. Έστω (Π) το σύνολο των σημείων M του επιπέδου με συντεταγμένες (x,y) που πληρούν τη σχέση

$$-MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = 2(x-1)^2$$

α. Δείξτε ότι τα B και Γ ανήκουν στο (Π)

β. Δείξτε ότι τα (Π) είναι το σύνολο των σημείων M , ώστε : $MA = 2\delta(M,D)$ όπου $\delta(M,D)$ είναι η απόσταση του M απ την ευθεία D .

γ. Να συμπεράνετε το είδος της καμπύλης που δημιουργεί το σύνολο (Π) και να καθοριστούν τα χαρακτηριστικά της στοιχεία.

(BACC. C, AIX- EN- PROVENCE)

ΛΥΣΗ

1 Είναι $\Delta(2,0)$. Το τετράπλευρο είναι παρ/μο.

2. α. Είναι $-(x-\frac{1}{2})^2 - y^2 + (x-\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + (x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 2(x-1)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2$ (υπερβολή) Προφανώς τα B και Γ ανήκουν στην υπερβολή (Π) . β. Αν $M(x,y)$: $MA = \sqrt{2} d(M,D) \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{2} |x-1| \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 2 \quad (*)$$

$M \in (\Pi)$

γ. Αν τα προηγούμενα προκύπτει ότι το (Π) είναι μια ισοσκελής υπερβολή με $a=\sqrt{2}$ $b=\sqrt{2}$ $\gamma=2$ που έχει την ευθεία D, διευθετούμε ως εξής $E(x,0)$.

39. α. Εστω $A(0, 17/4)$. Να γραφεί η εξίσωση των ευθειών που περνούν απ το A. (παράμετρος μ)
Για ποιά μ , οι αντίστοιχες ευθείες, εφάπτονται στην (P) : $\psi = -x^2 + 2x + 3$;

β. Να δειχτεί ότι απ το A περνούν δύο εφαπτόμενες της (P) κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθούν τα σημεία επαφής (τομής) με τους άξονες.

γ. Εστω B, σημείο της παράλληλης προς τον OX, απ' το A. Να δειχτεί ότι οι εφαπτόμενες απ' το B, στην (P) είναι κάθετες μεταξύ τους.

(BACC. LIBANAIS)

ΛΥΣΗ

α. Οι ευθείες απ το A είναι: $y = \mu x + \frac{17}{4}$. Τα κοινά τους σημεία με την (P) θα δίνονται απ τη λύση της εξίσωσης (οι τετράγωνοι) : $-x^2 + 2x + 3 = \mu x + \frac{17}{4}$. Για να έχουμε επαφή, πρέπει αυτή να έχει διπλή ρίζα δηλ. $\Delta = 0 \Leftrightarrow$

$$(\mu - 2)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \mu' = 2 - \sqrt{5} \quad \mu'' = 2 + \sqrt{5}.$$

β. Τα μ', μ'' είναι συνεπείς κατεύθυνσης των δύο εφαπτόμενων απ το A. Και είναι $\mu' \cdot \mu'' = -1$. Άρα είναι κάθετες μεταξύ τους. Τέτουν τον OX ενώ $\frac{17(\sqrt{5}+2)}{4}$, $\frac{17(2-\sqrt{5})}{4}$ αντ' ετοιχα.

γ. Αν λ οι συντελεστές κατεύθυνσης των ευθειών που περνούν απ' το $B(a, \frac{17}{4})$. Τότε έχουν εξίσωση: $y = \lambda(x-a) + \frac{17}{4}$.

Οι τετραγωνιστές των κοινών ωφείων τους με των (P) δίνονται απ τη λύση της εξίσωσης:

$-x^2 + 2\lambda x + 3 = \lambda(x-a) + \frac{17}{4}$ ή $x^2 + (\lambda-2)x - \lambda a + \frac{5}{4} = 0$. Άρα έχω επαφή όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda(1-a) - 1 = 0$. Οι ρίζες αυτές έχουν γινόμενο $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ που επιβεβαιώνει ότι οι αντίστοιχα εφαπτόμενες είναι κάθετες.

40. Δίνεται ορθογώνιο σύστημα αναφοράς χοφ και ένας κύκλος κέντρου O και ακτίνας R.

Εστω ένα σημείο M, πάνω στο κύκλο, που ορίζεται απ' τη γωνία $\alpha = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$. Οι ορθές προβολές του M, στους OX, OY είναι τα P, Q.

α. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής I, της PQ και της εσωτερικής διχοτόμου της $\angle OMI$.

β. Να υπολογιστεί το α ώστε $OF = R/2$ (OF η τετμημένη του I).

(BACC. A, B TOULOUSE)

ΛΥΣΗ

α. Η ευθεία PQ έχει εξίσωση $\frac{x}{R\cos\alpha} + \frac{y}{R\sin\alpha} = 1$ και η διχοτόμος της $\angle OMI$: $y = x \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$.

Άρα το I έχει τετμημένη $x = R / \left[\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \right]$ και τεταγμένη $y = R \tan \frac{\alpha}{2} / \left[\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \right]$.

β. Πρέπει να ισχύει

$$R / \left[\frac{1}{\epsilon \omega a} + \frac{1}{2\epsilon \omega^2 a} \right] = \frac{R}{2} \Leftrightarrow \frac{R(1 + \epsilon \omega a) \epsilon \omega a}{1 + 2\epsilon \omega a} = \frac{R}{2} \Leftrightarrow 2\epsilon \omega a = 1$$

$$\Leftrightarrow \epsilon \omega a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{Δηλ.} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}, \quad \alpha = \frac{5\pi}{4}, \quad \alpha = \frac{7\pi}{4}.$$

41. Δίνονται σε ορθογώνιο σύστημα τα σημεία $A(\mu, 2\mu, 3)$ $B(1, 1+\mu, \mu)$ και το $\Gamma(2\mu, 1-\mu, 2)$.

1. Να δείχτε, ότι για οποιοδήποτε μ , μ , τα τρία σημεία είναι διακεκριμένα ανά 2

2. Για ποιά μ , οι ευθείες OA και $B\Gamma$ είναι παράλληλες;

3. Για ποιά μ , οι ίδιες ευθείες είναι συνεπίπεδες; Σε ποιά περίπτωση τέμνονται;
(CLASSES DE PREMIERE C, D, E)

ΛΥΣΗ

1. Για οποιοδήποτε μ , έχουμε $z_A = 3$ $x_B = 1$, $z_\Gamma = 2$.
Αρ. το γνήσιο O , είναι διακεκριμένο από τα A, B, Γ .
Αν $x_A = x_B$ δηλ. $\mu = 1 \Rightarrow z_B = 1 + 3 = z_A$ άρα πάντα $A \neq B$.
Ομοίως έχουμε $B \neq \Gamma$ αφού $z_A = 3 \neq 2 = z_\Gamma$ και τελικά $B \neq \Gamma$ γιατί αν $x_B = x_\Gamma \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow z_B = 0 \neq 2 = z_\Gamma$.

2. Πρέπει τα διανύσματα \vec{OA} και $\vec{B\Gamma}$ να είναι συγγραμμικά: $\vec{OA} = \mu \vec{i} + 2\mu \vec{j} + 3\vec{k}$ $\vec{B\Gamma} = 2\mu \vec{i} - 2\mu \vec{j} + (2-\mu)\vec{k}$
είναι

$$D_1 \cdot \begin{vmatrix} 2\mu & 3 \\ -2\mu & 2-\mu \end{vmatrix} = 2\mu(5-\mu) \quad D_2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & \mu \\ 2-\mu & 2\mu \end{vmatrix} = \mu(\mu+4), \quad D_3 = -6\mu^2$$

Πρέπει $D_1 = D_2 = D_3 = 0 \Rightarrow \mu = 0$. (Επει αν $\mu = 0$

$\vec{OA} = 3\vec{k}$ και $\vec{OB} = \vec{i} + \vec{j}$ δηλ. το Β δεν βρίσκεται πάνω στο OA , οπότε έχουμε περίπτωση καθαρής παραλληλότητας.

3. Οι δύο ευθείες είναι συνεπίπλες αν το διάνυσμα \vec{OB} , βρίσκεται στο επίπεδο των \vec{OA} και \vec{BG} που σημαίνει ότι

$$D_1 + (\mu+1)D_2 + \mu D_3 = 0 \Leftrightarrow \mu(-5\mu^2 + 3\mu + 14) = 0 \Leftrightarrow \mu = 2 \vee \mu = -\frac{7}{5}$$

Τελικά έχουμε: αν $\mu \notin \{0, 2, -\frac{7}{5}\}$ οι ευθείες OA , BG δεν είναι συνεπίπλες. Αν $\mu = 0$ είναι παράλληλες, και αν $\mu = 0 \vee \mu = -\frac{7}{5}$ είναι τεμνόμενες.

42. Έχουμε στο επίπεδο, ένα σύστημα Καρτεσιανό (O, \vec{i}, \vec{j}) όχι ορθοκανονικό, με $|\vec{i}| = 1$ και $|\vec{j}| = 2$. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την απόλυτη τιμή του $\vec{i} \cdot \vec{j}$ και τι για το $\vec{i} \cdot \vec{j}$; Υποθέτουμε ότι $\vec{i} \cdot \vec{j} = -3/2$. Να εξαχθεί η εξίσωση της ευθείας (d) που περνάει από το σημείο $A(1, -1)$ και είναι ορθογώνια στο διάνυσμα $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

Εστω B το σημείο της (d) με τετμημένη 2. Να υπολογιστεί το συνημίτονο της γωνίας (\vec{j}, \vec{BO}) .

(CLASSES DE PREMIÈRES A, C, D)

ΛΥΣΗ.

Η ανισότητα του Schwarz είναι: $|\vec{i} \cdot \vec{j}| \leq |\vec{i}| \cdot |\vec{j}|$ και επειδή τα \vec{i}, \vec{j} είναι γραμμ. ανεξάρτητα γίνονται $|\vec{i} \cdot \vec{j}| < |\vec{i}| \cdot |\vec{j}|$ δηλ. $|\vec{i} \cdot \vec{j}| < 2$ άρα $-2 < \vec{i} \cdot \vec{j} \leq 2$

Εξίσωση ως (d): Η ευθεία (d) είναι το σύνολο των σημείων M για τα οποία το εσωτερικό γινόμενο $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$. Έστω M σημείο ως πρ. $M(x, y)$.

$$\text{Έχουμε } \vec{n} \cdot \vec{AM} = (2\vec{i} - \vec{j}) \cdot [(x-1)\vec{i} + (y+1)\vec{j}] = 2(x-1)|\vec{i}|^2 -$$

$$- (y+1)|\vec{j}|^2 + [2(y+1) - (x-1)]\vec{i} \cdot \vec{j} = 2(x-1) - 4(y+1) - \frac{1}{2}[2(y+1) - (x-1)],$$

$$= \frac{7}{2}(x-2y-3). \text{ Μια εξίσωση ως (d) είναι λοιπόν η } x-2y-3=0$$

Το εω(\vec{j}, \vec{BO}): Αν ως $x-2y-3=0$ έχω $B(2, -\frac{1}{2})$.
 Άρα $\vec{BO} = -2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \Rightarrow |\vec{BO}|^2 = (\vec{BO})^2 = 4|\vec{i}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{j}|^2 - 2\vec{i} \cdot \vec{j} = 8$
 $\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{BO} = -2\vec{i} \cdot \vec{j} + \frac{1}{2}|\vec{j}|^2 = 5.$
 Αντ. εω(\vec{j}, \vec{BO}) = $\frac{\vec{j} \cdot \vec{BO}}{|\vec{j}||\vec{BO}|} = \frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{8}.$

43. Εστω (O, \vec{i}, \vec{j}) ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς στο επίπεδο. Δίνονται και τα σημεία A, B, Γ, Δ έτσι ώστε $\vec{OA} = \vec{i}$ $\vec{AD} = 3\vec{i}$ $\vec{BO} = \vec{OF} = 2\vec{j}$.

Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των σημείων P και Q που είναι οι ορθές προβολές του O, πάνω στις AB και ΓΔ αντίστοιχα. Ποιό είναι το κοινό σημείο M των AB και ΓΔ;

(CLASSES DE PREMIÈRE C, D, E)

ΛΥΣΗ.

Υπολογισμός των P, Q Να καθορίσουμε το P,

χρησιμοποιούμε τις δύο συνθήκες:

$$\left. \begin{aligned} &\text{τα } \vec{AP}, \vec{AB} \text{ συγγραμμικά} \quad (1) \\ &\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0 \quad (2) \end{aligned} \right\}$$

Έστω (x, y) οι συντεταγμένες του P . Έχουμε τότε
 $\vec{AP} = (x-1)\vec{i} + y\vec{j}$. Επίσης $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -(\vec{i} + 2\vec{j})$ (1)

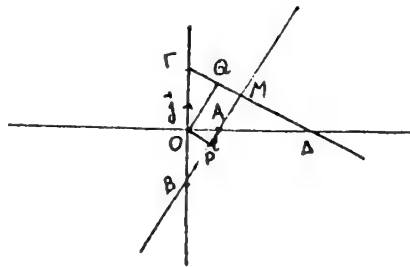
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - 2x + 2 = 0 \quad \text{και} \quad (2) \Leftrightarrow -x - 2y = 0.$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν το σύστημα } \left. \begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5} \right)$$

και $\vec{OP} = \frac{2}{5}(2\vec{i} - \vec{j})$. Έχουμε $\vec{GA} = 2(2\vec{i} - \vec{j})$ άρα το \vec{GA} είναι παράλληλο του \vec{OP} και ορθογώνιο στο \vec{AB} . Επίσης O είναι το μέσο της BG , τα P και Q μέσοι διυψώσεων των MB και MG και $\vec{PA} = \frac{1}{2}\vec{BG} = 2\vec{j}$.

Άρα $\vec{OA} = \vec{OP} + \vec{PA} = \frac{2}{5}(2\vec{i} + 4\vec{j})$ και οι συντεταγμένες του Q είναι $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5} \right)$.

Συντεταγμένες του M : Έχουμε $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OA} = \frac{2}{5}(4\vec{i} + 3\vec{j})$ δηλ.
 $M\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$.



44. Στον τριδιάστατο χώρο θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ ώστε $\vec{OA} = 2\vec{i}$, $\vec{OB} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{OG} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. όπου $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ τρισσορθogώνιο σύστημα

1. Να δειχτεί ότι τα επίπεδα OBF και $AB\Gamma$ είναι κάθετα.

2. Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που περιγράφεται στο τετράεδρο $OAB\Gamma$. Να δοθεί το κέντρο και η ακτίνα της σφαίρας. (S)

3. Αν $p, q \in \mathbb{R}$ έστω M το σημείο που ορίζεται από την $\vec{OM} = (p+q)(2\vec{i} - \vec{j}) + (2p-q)\vec{k}$. Να δειχτεί ότι αν το (p, q) διαγράφει το \mathbb{R}^2 , το σημείο M διαγράφει ένα επίπεδο (H) του οποίου να δοθεί η εξίσωση.

4. Να καθοριστεί το κέντρο και η ακτίνα, του κύκλου, που δίνει η τομή των (S) και (H).

(BS)

ΛΥΣΗ

1. Έχοντας $\vec{BA} = \vec{i} - \vec{j}$ τα γινόμενα $\vec{OB} \cdot \vec{BA}$ και $\vec{OG} \cdot \vec{BA}$ μηδενίζονται, έτσι το διάνυσμα \vec{BA} είναι κάθετο στο επίπεδο OBF . Αυτό σημαίνει, σημαίνει $\vec{BA} \in (BA\Gamma)$ ότι τα δύο επίπεδα κάθετα.

2. Η εξίσωση της σφαίρας είναι του τύπου $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$ γιατί περιέχει τα αρχία O του συντεστήματος. Επειδή περιέχει και το $A: 4 - 2 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1$. Ομοίως για το $B: 1 + 1 - 2a - 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ομοίως $c = \frac{1}{2}$. Η (S) λοιπόν είναι: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - z = 0$ ή ομοίως $(x-1)^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$. (Έχει λοιπόν κέντρο $E(1, 0, \frac{1}{2})$ και ακτίνα ίση με $\frac{\sqrt{5}}{2}$).

3. Μπορούμε να γράψουμε για το \vec{OM} :

$$\vec{OM} = p(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) + q(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}).$$

Αφ' ετέρου τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = (2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα γιατί αν την $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda + \mu = 2\lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

Τα σημεία Μ λοιπόν βρίσκονται όλα στο επιπέδο (H) που διέρχεται από την αρχή Ο, παράλληλο προς το επίπεδο των \vec{u}, \vec{v} . Το διάνυσμα $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j}$ είναι ορθόγωνιο στα \vec{u} και \vec{v} , γιατί είναι ορθόγωνιο ξεχωριστά στα $2\vec{i} - \vec{j}$ και στο \vec{k} . Η εξίσωση του (H) λοιπόν είναι: $x + 2y = 0$.

4. Έστω F η ορθή προβολή του E (κέντρου σφαίρας) πάνω στο (H). Έχουμε λοιπόν $|\vec{EF}| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (απόσταση του E από το H).

Αφ' ετέρου μπορούμε να γράψουμε

$$M \in (S) \cap (H) \Leftrightarrow |\vec{EM}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } \vec{EF} \cdot \vec{FM} = 0$$

$$\text{Έχουμε } \vec{EM} = \vec{EF} + \vec{FM} \Rightarrow |\vec{EM}|^2 = |\vec{EF}|^2 + |\vec{FM}|^2 + 2\vec{EF} \cdot \vec{FM}$$

$$\text{οπότε } |\vec{EM}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } \vec{EF} \cdot \vec{FM} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} + |\vec{FM}|^2 = \frac{2}{4} \text{ και } M \in (H)$$

$$\text{Τελικά έχουμε } M \in (S) \cap (H) \Leftrightarrow |\vec{FM}| = \frac{\sqrt{21}}{20} \text{ και } M \in (H).$$

Άρα η διατύπωση του πρόβληματος είναι ο κύκλος με κέντρο F και ακτίνα $\frac{\sqrt{21}}{20}$.

Συντεταγμένες του F:

$$\vec{EF} = (x-1)\vec{i} + y\vec{j} + (z-\frac{1}{2})\vec{k} \text{ και επειδή } F \in (H)$$

$$\vec{EF} = -(2y+1)\vec{i} + y\vec{j} + (z-\frac{1}{2})\vec{k}. \text{ Το διάνυσμα } \vec{EF}$$

είναι παράλληλο προς το \vec{n} οπότε

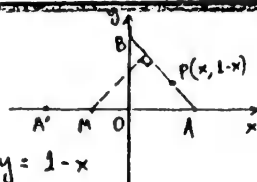
$$y = -2(2y+1) \text{ και } z - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow F\left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right).$$

45. Εστω το ορθοκανονικό σύστημα (O, \vec{OA}, \vec{OB}) .
 Σημειώνουμε με M το σημείο που $\vec{OM} = \mu \cdot \vec{OA}$ με $\mu \in \mathbb{R}$.
 Εστω P ένα μεταβλητό σημείο, με τετμημένη x ,
 πάνω στο τμήμα AB . Να υπολογιστεί η τεταγμένη
 του P συναρτήσει του x . Ναδειχτεί ότι το τετρά-
 γωνο του διανύσματος \vec{MP} είναι ο αριθμός

$$f_{\mu}(x) = 2x^2 - 2x(\mu+1) + \mu^2 + 1$$

Να υπολογιστεί συναρτήσει του μ , το ελάχιστο
 της $f_{\mu}(x)$ και να ερμηνευτούν γεωμετρικά τα
 αποτελέσματα της άσκησης.

(B.S.)

ΛΥΣΗ.

$$AB: x+y-1=0 \Rightarrow \text{τεταγμένη του } P: y=1-x$$

$$\text{Τετράγωνο του } \vec{MP}: \vec{OP} = x\vec{OA} + (1-x)\vec{OB} \quad \text{επίσης } \vec{OM} = \mu\vec{OA}$$

$$\text{Άρα } \vec{MP} = \vec{OP} - \vec{OM} = (x-\mu)\vec{OA} + (1-x)\vec{OB}$$

$$\text{Άρα } (\vec{MP})^2 = (x-\mu)^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x(\mu+1) + \mu^2 + 1 = f_{\mu}(x).$$

$$\text{Ελάχιστο της } f_{\mu}(x): f_{\mu}(x) = 2\left(x - \frac{\mu+1}{2}\right)^2 + \frac{(\mu-1)^2}{2}$$

$$\text{Επίσης έχουμε (1) } \forall x \in \mathbb{R}, f_{\mu}(x) \geq f_{\mu}\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = \frac{(\mu-1)^2}{2}$$

Επίσης η $f_{\mu}(x)$ είναι φθίνουσα στο $(-\infty, \frac{\mu+1}{2})$ και αύξουσα
 στο $(\frac{\mu+1}{2}, +\infty)$.

Το P αφού βρίσκεται στο $AB \Rightarrow x \in [0, 1]$

Άρα θα βρώ το ελάχιστο της $f_{\mu}(x)$ για $x \in [0, 1]$.

$$\text{Αν } \frac{\mu+1}{2} \in [0, 1] \Leftrightarrow \mu \in [-1, 1] \text{ το ελάχιστο είναι } \frac{(\mu-1)^2}{2} \text{ ή } m_{\mu}(1).$$

Εστω A' το ορθογώνιο του A ως προς O . Η προ-

ηγούμνη προεκτέλεση γράφεται $\forall M \in [A', A]$ το ελάχιστο της
 $f_{\mu}(x)$ είναι $\frac{(\mu-1)^2}{2}$. Βλέπουμε εύκολα ότι το ελάχιστο ενώ

είναι το τετράγωνο της απόστασης του M από την ευθεία (AB) .

Υποθέτουμε $\mu < -1$, γράφουμε ότι το M αριστερά του A' .
Τότε $\frac{\mu+1}{2} < 0$ έχουμε λοιπόν την κατάληξη: $[0, 1] \subset \left[\frac{\mu+1}{2}, +\infty\right)$

η $f_\mu(x)$ είναι λοιπόν αυξανούσα στο $[0, 1]$ άρα το ελάχιστο είναι το $f_\mu(0) = \mu^2 + 1$. Αυτό είναι το $d^2(M, B)$.

Τελικά αν $\mu > 1$ δηλ. το M δεξιά του A , έχουμε
 $\frac{\mu+1}{2} > 1 \Rightarrow [0, 1] \subset (-\infty, \frac{\mu+1}{2}]$ η $f_\mu(x)$ είναι φθίνουσα στο $[0, 1]$ και το ελάχιστο είναι $f_\mu(1) = (\mu-1)^2 = d^2(M, H)$.

46. Εστω το τρισσογώνιο σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και τα σημεία A, B και Γ τέτοια ώστε: $\vec{OA} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ $\vec{OB} = 2\vec{OA}$ και $\vec{O\Gamma} = -3\vec{OA}$. Ποιο είναι το σύνολο (P) των σημείων M , για τα οποία τα γινόμενα $\vec{OM} \cdot \vec{BM}$ και $\vec{AM} \cdot \vec{GM}$ είναι ίσα; Να μελετήσετε τα κοινά σημεία του (P) και της σφαίρας (Γ) που έχει κέντρο το A , και περνάει από την αρχή O του συστήματος.
(B. S)

ΛΥΣΗ

Τα σημεία είναι: $A(1, -1, 1)$ $B(2, -2, 2)$ $\Gamma(-3, 3, -3)$.
Αν το M έχει (x, y, z) τότε
 $\vec{OM} \cdot \vec{BM} = x(x-2) + y(y+2) + z(z-2) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x-y+z)$ και

$$\vec{AM} \cdot \vec{GM} = x^2 + y^2 + z^2 + 2(x-y+z) - 9.$$

Το σύνολο (P) λοιπόν δίνεται αναλυτικά απ των
 $4(x-y+z) - 9 = 0$ που είναι επιπέδο κάθετο στο \vec{OA} .

Μελέτη της (P) ∩ (Γ). Η αυτίνα της σφαίρας (Γ) είναι
 $|\vec{OA}| = \sqrt{3}$. Η απόσταση d του σημείου A απ το επίπεδο
 (P) είναι $d = \frac{1}{4\sqrt{3}} |4(1+1+1) - 9| = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Επειδή $d < |\vec{OA}|$
 η τομή που μελετούμε είναι κύκλος του (P) με
 αυτίνα $r = \sqrt{(\vec{OA})^2 - d^2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$ και κέντρο A', που είναι η
 προβολή του A πάνω στο (P).

Για τις συντεταγμένες του A': Αφού και το \vec{OA} είναι
 κάθετο στο (P) τότε $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{OA}' = \lambda \vec{OA}$. Άρα οι συντετα-
 γμένες του A' είναι τις μορφής $(\lambda, -\lambda, \lambda)$ και επειδή
 αυτό ανήκει στο (P) έχουμε $12\lambda - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$.

Το πρόβλημα μπορεί να προσαρμοστεί και ως 2 διαστάσεις.

47. Στο καρτεσιανό επίπεδο $(0, \vec{i}, \vec{j})$
 θεωρώ τις απεικονίσεις f_1 και f_2 του επιπέδου
 στον εαυτό του που συνδέουν το $M(x, y)$ με το
 $M(x', y')$ αντίστοιχα ως εξής:

$$f_1: \begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = x - y + 1 \end{cases} \quad f_2: \begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

1. Να ορίσεις ομοίως η απεικόνιση $f_2 \circ f_1$
2. Για το τυχόν M του επιπέδου, έχουμε απ'

τις f_1, f_2 , και $f_2 \circ f_1$ ως εικόνες τα $M_1 = f_1(M)$, $M_2 = f_2(M)$ και $M_3 = (f_2 \circ f_1)(M)$. Εστω η νέα απεικόνιση που συνδέει το σημείο μας M με το K , που ορίζεται απ' τη σχέση: $\overrightarrow{KM_1} + \overrightarrow{KM_2} - \overrightarrow{KM_3} = \vec{0}$.

Να δείχτε ότι οι συντεταγμένες X, Y του σημείου K , δίνονται, συναρτήσεως των συντεταγμένων του M , απ' τις σχέσεις:

$$X = 3\psi - 2 \text{ και } Y = \chi - 2\psi + 2.$$

3. Να βρεθούν τα σταθερά σημεία της f .

(Ε. Μ)

ΛΥΣΗ

1. Είναι $M_1(x_1, y_1) = f_1(M)$ όπου $x_1 = x + y - 1, y_1 = x - y + 3$.
Ομοίως $M_2(x_2, y_2) = f_2(M)$ με $x_2 = y + 2, y_2 = x + 1$.
Άρα η $f_2 \circ f_1$ δίνει το $M_3(x_3, y_3)$ που φαίνεται
 $x_3 = y_1 + 2 = x - y + 3$, και $y_3 = x_1 + 1 = x + y$.

2. Η δοθείσα ιδιότητα που ορίζει το K , γράφεται:
 $(x_1 + x_2 - x_3) - X = 0$ και $(y_1 + y_2 - y_3) - Y = 0$ άρα οι συντεταγμένες του K δίνονται:
 $X = x_1 + x_2 - x_3 = 3y - 2$
 $Y = y_1 + y_2 - y_3 = x - 2y + 2$.

3. Το $K = f(M)$ ταυτίζεται με το M όταν
 $x = 3y - 2$ και $y = x - 2y + 2$ δηλ τα $(1, 1), (-2, 0)$.

48. Εστω τα σημεία $M_t(1+t\sigma\alpha, 0)$, $N_t(-1, t\eta\mu\alpha)$ του Καρτεσιανού επιπέδου, όπου $t \in \mathbb{R}$ (παράμετρος) και $\alpha \in (0, \pi/4)$.

Εστω το G_t το μέσο του τμήματος $M_t N_t$ και (C_t) ο κύκλος δισμέτρου $M_t N_t$.

1. Να δειχτεί ότι το σύνολο των G_t όταν το t διαγράφει το \mathbb{R} , είναι μια ευθεία.

2. Να δειχτεί ότι υπάρχει στο επίπεδο ένα σημείο T , διαφορετικό απ' το N_0 , τέτοιο ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το T να ανήκει στον κύκλο (C_t) (να μη βρεθούν οι συντεταγμένες του)

3. Να δειχτεί ότι $\forall t \in \mathbb{R}$ οι γωνίες των ζευγών των ευθειών (TM_0, Tt) και (TN_0, Tt) είναι ίσες.

(BACC. C.)

ΛΥΣΗ

1. Το G_t έχει συντεταγμένες το ημίαθροισμα των συντεταγμένων των M_t, N_t δηλ.

$$G_t \left(\frac{t\sigma\alpha}{2}, \frac{t\eta\mu\alpha}{2} \right). \text{ Αν τις αναθέσω } G_t(X, Y)$$

δη τις οχίσω $X = \frac{t\sigma\alpha}{2}$ $Y = \frac{t\eta\mu\alpha}{2}$ αν απαλείψω το t , έχω $\frac{Y}{X} = \tan \alpha$ ή $Y = \tan \alpha \cdot X$ ή δη τα διάνοια G_t

βρίσκονται σε ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.

2. Ο κύκλος (C_t) έχει κέντρο το G_t και ακτίνα το μισό της απόστασης $M_t N_t$ δηλ. $\frac{\sqrt{(2+t\sigma\alpha)^2 + (t\eta\mu\alpha)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+t^2+4t\sigma\alpha}}{2}$. Επομένως η εξίσωση του (C_t) είναι:

$$\left(x - \frac{t\omega\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{t\gamma\mu\alpha}{2}\right)^2 = \frac{4+t^2+4\omega\alpha\cdot t}{4} \quad \text{ή μετα τις πράξεις}$$

$$x^2 + y^2 - t\omega\alpha\cdot x - t\gamma\mu\alpha\cdot y - (1+t\omega\alpha) = 0 \quad (1)$$

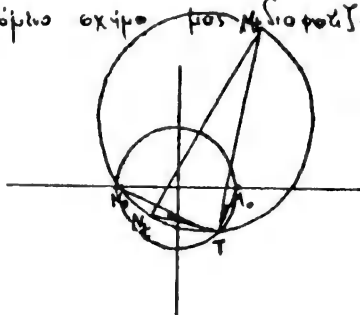
Για να βρούμε τα σταθερά του γρήα, χρειαζόμαστε την (1) στη μορφή: $x^2 + y^2 - t(x\omega\alpha + y\gamma\mu\alpha + \omega\alpha) = 0$. Αυτή, για να ισχύει ανεξάρτητα του t , θα πρέπει

$$\begin{cases} \text{α)} \quad x^2 + y^2 = 1 \\ \text{β)} \quad x + y\omega\alpha + 1 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ή αναλυτικά θα βρω το γρήα τριγ} \\ \text{τον κύκλου (α) και τις ευθείες (β).} \end{array} \right.$$

Ένα από αυτά είναι το N_0 . Όπως η ευθεία (β) και ο κύκλος (α) έχουν κι άλλο κοινό γρήα, αφού το $O(0,0)$ κέντρο του κύκλου, απέχει απ την ευθεία (β) απόσταση $d = \frac{1}{\sqrt{1+\omega\alpha^2}} = \omega\alpha < 1 = r$. Αυτό το

δεύτερο γρήα το ονομάζουμε T , και είναι γρήα του κύκλου διαμέτρου N_0N_0 .

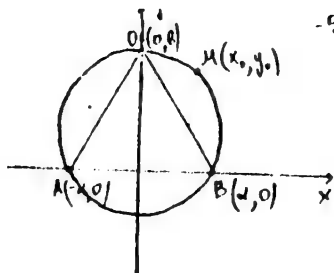
3. Το τρίτο εύρημα λύνεται γεωμετρικά. Το επόμενο σχήμα μας βοηθάει. Ο μεγάλος κύκλος είναι κάποιος (C_t) που περνάει υποχρεωτικά απ τα N_0 και T , που ανήκουν στην $x^2 + y^2 = 1$. Οι διασπόμενες γωνίες είναι πράγματι ίσες, αφού η κάθε μία ισούται με τη διαφορά απ την ορθή τις σταθερές N_0TM_0 .



49. Εστω (C) ο κύκλος, ο περιγεγραμμένος σε ισοσκελές τρίγωνο OAB , με βάση AB . Να δείχτε ότι για κάθε $M \in (C)$ ισχύει :

$$MA \cdot MB = |OA^2 - OM^2|.$$

...ΤΑΝΤΙΝΟΣ



Παίρνοντας κατάλληλα το
εξωτερικό σημείο, έχω τις
απλούστερες περιπτώσεις για
το σημείο Α, Β, Ο.

Η εξίσωση του κύκλου λοιπόν, δίνεται ως

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^2 & -a & 0 & 1 \\ a^2 & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^2 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 2a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ή τελικά, προκύπτει
ως κάτω την τελική
απλοποίηση:

$$(C): bx^2 + by^2 + (a^2 - b^2)y - a^2b = 0 \quad (1).$$

Αφ' ετέρου είδαμε $OA^2 = b^2 + a^2$ $OM^2 = x_0^2 + (y_0 - b)^2$ όπου (x_0, y_0) σημείο του (1). Όχοντες το δοθέν σημείο έχουμε:

$$|b^2 + a^2 - x_0^2 - (y_0 - b)^2| = \sqrt{[(x_0 + a)^2 + y_0^2]} [(x_0 - a)^2 + y_0^2] \quad (2)$$

γράφεται:

Υψώνοντας τα δύο μέλη της (2) στο τετράγωνο και ευτελώντας τις πράξεις έχω: $bx^2 + by^2 + (a^2 - b^2)y - a^2b = 0$ που είναι ακριβώς αφού $M(x_0, y_0) \in (C)$.

50. Σε ορθοκανονικό σύστημα, δίνεται το σύνολο Ε των σημείων $K(x, y)$ ώστε:

$$x^2 + 4y^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

Να μελετηθεί και να κατασκευαστεί το σύνολο Ε.

(BACC. C AMIENS)

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση που περιγράφει το εσωτερ. Ε γράφεται:

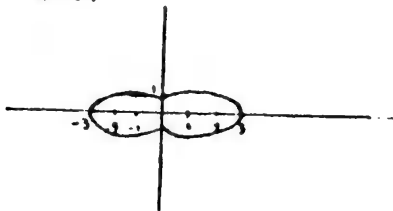
$$\left. \begin{aligned} (1) \quad x^2 + 4y^2 - 2x - 3 &= 0 & \text{αν } x > 0 \\ (2) \quad x^2 + 4y^2 + 2x - 3 &= 0 & \text{αν } x < 0 \end{aligned} \right\}$$

Η (1) μετασχηματίζεται σε $x^2 - 2x + 1 + 4y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Παριστάνει έλλειψη με κέντρο το $(1, 0)$

και μήκη αξόνων $2a=4$ $2b=2$ $\gamma=1$ και εστίες $(0, 0)$ $(2, 0)$.

Μας ενδιαφέρει όμως το τμήμα της δεξιάς του Ox .

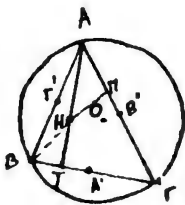
Ομοίως η (2) γράφεται: $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Είναι πάλι έλλειψη με κέντρο $(-1, 0)$ $2a=4$ $2b=2$ της οποίας μας ενδιαφέρει το τμήμα $\gamma' = x < 0$.



51. Γ α. Εστω A, B, Γ τρία μη συνευθειακά σημεία στο επίπεδο. Εστω επίσης O , το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο $\Delta B \Gamma$. Αν A', B', Γ' τα μέσα των $BF, \Gamma A$ και AB αντιστοιχά να οειχτεί ότι το σημείο H που ορίζεται από την ισότητα (I) $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG}$, είναι το ορθό-κέντρο του τριγώνου.

β. Να δείξετε επίσης $\vec{AH} = 2\vec{OA}'$

(BACC. C PARIS)

ΛΥΣΗ

α. Όταν διανύσματα είναι ίσα, έχουν ίσα προβολές.

Άρα (έχουμε το ενύψωφο;) έχουμε:

$$(1) \Rightarrow \text{προβ}_{\text{BG}} \vec{OH} = \text{προβ}_{\text{BG}} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \Rightarrow$$

$$\text{προβ}_{\text{BG}} \vec{OH} = \text{προβ}_{\text{BG}} \vec{OA} + (\text{προβ}_{\text{BG}} \vec{OB} + \text{προβ}_{\text{BG}} \vec{OC}) \Rightarrow$$

$\text{προβ}_{\text{BG}} \vec{OH} = \text{προβ}_{\text{BG}} \vec{OA}$. Άρα τα σημεία Α και Η, βρίσκονται στην ίδια κάθετο προς τη ΒΓ, δηλ. το Η βρίσκεται στο ύψος ΑΓ. Ανάλογο αποδεικνύεται ότι το Η βρίσκεται και στο ύψος ΒΠ. Άρα το Η ορθόκέντρο.

β. Αν το σχήμα έχουμε $\vec{AH} = \vec{AO} + \vec{OH} \quad (1)$
 $\vec{AH} = \vec{AO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA}'$

52. Εστω $\lambda \in \mathbb{R}$, και η $\psi^2 + \lambda x^2 + (\lambda + 1)x - \lambda/4 = 0$ (I)

1. Να εξετάσετε για τις διάφορες τιμές του λ το είδος της καμπύλης που παριστάνει η (I) σε ορθοκανονικό σύστημα.

2. Να δοθούν οι συντεταγμένες των κέντρων συμμετρίας των καμπύλων σε κάθε περίπτωση, καθώς και οι εξισώσεις των ασυμπτώτων τους.

(BACC 1), E DAKAR)

ΛΥΣΗ

1. Στη περίπτωση που $\lambda = 0$ η (1) γίνεται $y^2 + x = 0$

και παριστάνει προς τους άξονες Ox, Oy το O , ήτοι ο
 συμμετρικός του x x και y y $E(-\frac{1}{4}, 0)$.

Για $\lambda \neq 0$ η (1) γράφεται:

$$y^2 + \lambda \left[x^2 + \frac{\lambda+1}{\lambda} x \right] - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{ή} \quad y^2 + \lambda \left[x + \frac{\lambda+1}{2\lambda} \right]^2 - \frac{(\lambda+1)^2}{4\lambda} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{ή τελικά} \quad y^2 + \lambda \left[x + \frac{\lambda+1}{2\lambda} \right]^2 - \frac{(\lambda+1)^2 + \lambda^2}{4\lambda} = 0$$

Ονομάζω O' το γνήσιο με $O'(-\frac{\lambda+1}{2\lambda}, 0)$ και $O'X, O'Y$

άξονες παράλληλους προς τους Ox, Oy . Σ' αυτό το
 νέο σύστημα η εξίσωση (1) γίνεται:

$$y^2 + \lambda x'^2 - \frac{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}{4\lambda} = 0$$

Αν υποθέσουμε $\lambda < 0$ η (1) παριστάνει υπερβολή με
 κέντρο το O' και ασυμπτώτους τις $Y = \pm X\sqrt{-\lambda}$.

Οι κορυφές που βρίσκονται στον $X'O'X$ έχουν τετμημένες
 $\pm \frac{\sqrt{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}}{2\lambda}$. Ως προς το αρχικό σύστημα, οι αψύ-

πτωτες έχουν εξισώσεις $y = \pm \left(x + \frac{\lambda+1}{2\lambda} \right) \sqrt{-\lambda}$.

Αν τώρα $\lambda > 0$ η (1) παριστάνει έλλειψη
 με κέντρο O' . Οι κορυφές της πάνω στον $X'O'X$
 έχουν τετμημένες $\pm \frac{\sqrt{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}}{2\lambda}$ και πάνω στον $Y'O'Y$

$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\lambda}}$. Αν λοιπόν $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ ή $\lambda < 1$ ο άξονας

$X'O'X$ είναι ο εστιακός άξονας της έλλειψης. Αν όμως
 $\lambda > 1$ αντίστροφα. Τελικά για $\lambda = 1$ η (1) παριστάνει
 κύκλο με κέντρο το O' , και ακτίνα $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

53. Έστω ισοπλευρο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ πλευράς a . θεωρώ το O , μέσον του $B\Gamma$, G το κέντρο βάρους του τριγώνου και O' το συμμετρικό του G ως προς O .

1. Να προσδιοριστεί το σύνολο E των σημείων M , που πληρούν την $|-3\vec{MG} + 2\vec{MO}| = |\vec{EO}'|$

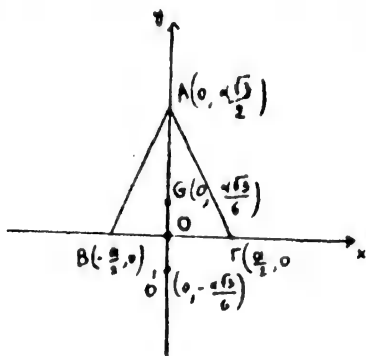
2. Να προσδιοριστεί το σύνολο L των σημείων M που πληρούν την $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

Πως πρέπει να διαλέξουμε το k , ώστε το σύνολο L να περιέχει το σημείο G ;

3. Να δειχτεί ότι για οποιοδήποτε k του επιπέδου ισχύει: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + a^2$.

Να προσδιοριστεί το σύνολο L , των σημείων του M , ώστε: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$

(BACC. ΣΕΚ ΠΕ C, 1983)



ΛΥΣΗ

1. Έστω $M(x_m, y_m)$ σημείο του συνόλου E . Τότε:

$$\begin{aligned} -3\vec{MG} + 2\vec{MO} &= -3(-x_m, \frac{a\sqrt{3}}{6} - y_m) + \\ &+ 2(-x_m, -y_m) = (3x_m, -\frac{a\sqrt{3}}{2} + 3y_m) + (-2x_m, -2y_m) \\ &= (x_m, y_m - \frac{a\sqrt{3}}{2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ομοίως } \vec{MO'} &= (-x_m, -\frac{a\sqrt{3}}{6} - y_m). \text{ Άρα η δοθεί-} \end{aligned}$$

σα σχέση γράφεται

$$x_m^2 + (y_m - \frac{a\sqrt{3}}{2})^2 = (-x_m)^2 + (-\frac{a\sqrt{3}}{6} - y_m)^2 \Leftrightarrow y_m = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Αντ. το σύνολο E είναι ευθεία επί το $(\tau, // x\gamma')$.

2. Η σχέση γίνεται: (Αν $M(x_m, y_m)$ σημείο του L)

$$(-\frac{a}{2} - x_m)^2 + y_m^2 + (\frac{a}{2} - x_m)^2 + y_m^2 - 2[x_m^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{2} - y_m)^2] = k \Leftrightarrow$$

$$y_M = \frac{k + \alpha^2}{2\alpha\sqrt{3}} \quad (\text{το } L, \text{ είναι ευθεία } \parallel \kappa\kappa').$$

Α. Θέλουμε να περιέχει το G , πρέπει

$$\frac{k + \alpha^2}{2\alpha\sqrt{3}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow k = 0.$$

3. Θα δειχτεί, ότι η σχέση πληρείται για κάθε M , δηλ. η σχέση

$$x_M^2 \left(y_M - \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(x_M + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + y_M^2 + \left(x_M - \frac{\alpha}{2} \right)^2 + y_M^2 = 3 \left[x_M^2 + \left(y_M - \frac{\alpha\sqrt{3}}{6} \right)^2 \right] + \alpha^2$$

είναι ταυτότης ως προς x_M, y_M . Προφανώς επιτελούνται τις πράξεις προκύπτει $0=0$ οεδ.

$$MA^2 + MB^2 + MG^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$x_M^2 + \left(y_M - \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(x_M + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + y_M^2 + \left(x_M - \frac{\alpha}{2} \right)^2 + y_M^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$3x_M^2 + 3y_M^2 + \frac{3\alpha^2}{4} - \alpha\sqrt{3} y_M + \frac{\alpha^2}{4} = 2\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} y - \frac{\alpha^2}{4} = 0 \quad (\text{κύκλος, γνωστών στοιχείων}).$$

54. Εστω το ορθογώνιο ο κατεσσοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG=\alpha$).

1. Να προσδιοριστεί το σύνολο E_1 των σημείων M του επιπέδου, που πληρούν τη σχέση

$$4MA^2 - MB^2 - M\Gamma^2 = 2\alpha^2.$$

2. α. Εστω \vec{f} η συνάρτηση που αντιστοιχεί: κάθε σημείο του επιπέδου σε διάνυσμα, με τύπο

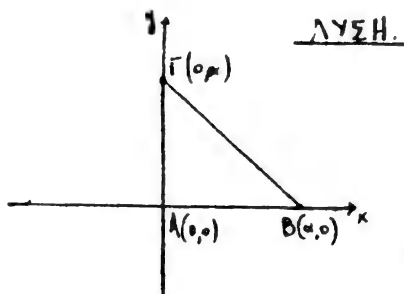
$$\vec{f}: M \rightarrow 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{M\Gamma}$$

Να δειχτεί ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση και να προσδιοριστεί η τιμή της.

β. Να καθοριστούν το σύνολο E_2 των σημείων M του επιπέδου, που πληρούν την

$$2MA^2 - MB^2 - MG^2 = -2a^2$$

(PACC. BILLE PERLE C, 1983)



1. Η $4MA^2 - MB^2 - MG^2 = 2a^2$ γίνεται:

$$4[x_M^2 + y_M^2] = (a - x_M)^2 + y_M^2 + x_M^2 + (a - y_M)^2 + 2a^2$$

$$\Leftrightarrow x_M^2 + y_M^2 + ax_M + ay_M - 2a^2 = 0$$

(κύκλος γνωστών στοιχείων)

2. α. Είναι $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MG} = 2(-x_M, -y_M) - (a - x_M, -y_M) - (-x_M, a - y_M) = \dots = (-a, -a) = \text{σταθερό}$. Δηλαδή η συνάρτηση f είναι σταθερή, με ακριβώς το διάνυσμα $(-a, -a)$.

β. Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$2x_M^2 - 2y_M^2 = a^2 + x_M^2 - 2ax_M + y_M^2 + x_M^2 + a^2 + y^2 - 2ay_M - 2a^2 \Leftrightarrow$$

$$x + y = 0 \quad (\text{ευθεία } \parallel BG).$$

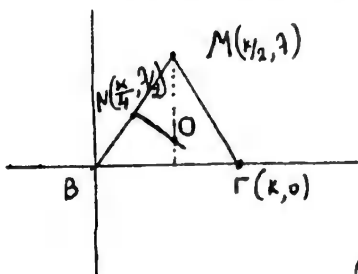
55. Μπορούμε στο επίπεδο, σταθερό σημείο B και ένα άλλο Γ , που διαγράφει δοθείσα ευθεία α σταθερής διεύθυνσης, που διέρχεται απ το B

(χβχ). Κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο με βάση ΒΓ και κορυφή Μ.

Να καθοριστέ το σύνολο των σημείων Μ, αν είναι γνωστό, ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο ΒΜΓ, έχει σταθερή ακτίνα R.
(SÉRIE E, 1983)

ΛΥΣΗ

Είναι κατ' εξοχήν πρόβλημα αναλυτικής γεωμετρίας.



Με κατάλληλο σύστημα αναφοράς θα προσδιορίσω τις συντεταγμένες του περικεντρου.

Είναι $\lambda_{BM} = \frac{l}{k/2} = \frac{2l}{k}$ άρα

$$\lambda_{NO} = -\frac{k}{2l} \quad (\text{NO μεσοκάθετος}).$$

Άρα η εξίσωση της ΝΟ: $y - \frac{l}{2} = -\frac{k}{2l}(x - \frac{k}{4})$ (1) Το 0, προκύπτει απ τη λύση του συστήματος της

(1) και της $x = \frac{k}{2}$ που είναι

$$x = \frac{k}{2}, \quad y = \frac{4l^2 - k^2}{8l}. \quad \text{Επειδή δε } BO = R = \text{σταθερό}$$

$$\text{έχω} \quad \frac{k^2}{4} + \left(\frac{4l^2 - k^2}{8l}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow (4l^2 + k^2)^2 = 64l^2 R^2 \Leftrightarrow$$

$$4l^2 + k^2 = \pm 8lR \Leftrightarrow 4\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 4l^2 = \pm 8lR \Leftrightarrow$$

$(\Leftrightarrow) 4x^2 + 4y^2 \pm 8Ry = 0$. Δηλ. Ο γεωμ. τόπος είναι 2 κύκλοι συγγεγριμένοι ως προς x'x', που δίνουν 4 ευθεία για το Μ, σε κάθε θέση του Γ.

56 Σε δοσμένο σύστημα αναφοράς, στο επίπεδο P , ονομάζουμε μοναδιαίο δίσκο το σύνολο $D = \{M \in P / OM \leq 1\}$

Ονομάζουμε απόσταση του σημείου M , απ το δίσκο D , $\delta(M, D)$ τη μικρότερη των αποστάσεων του M , απ τα σημεία του D .

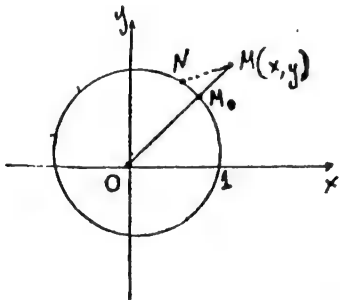
1. Να δειχτεί ότι αν το M είναι εξωτερικό του δίσκου, τότε $\delta(M, D) = MM_0$ όπου M_0 είναι η τομή του κύκλου $(O, 1)$ και του τμήματος OM .

2. Αν (χ, ψ) οι συντεταγμένες του M τότε $\delta(M, D) = \sqrt{\chi^2 + \psi^2} - 1$.

3. Έστω Δ η ευθεία $\psi = -2$. Να καθοριστεί το σύνολο των σημείων M του επιπέδου ώστε $\delta(M, D) = 2\delta(M, \Delta)$.

(BACC. C BESANCON 1984)

ΛΥΣΗ



1. Είναι $MM_0 < MN$ (γνωστή γεωμετρική πρόταση).

2. $\delta(M, D) = MO - OM_0 = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ (αδ).

3. Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - 1 = 2|-2 - y| \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} - 1 &= 2(-2 - y) && \text{αν } y < -2 \quad (1) \\ \sqrt{x^2 + y^2} - 1 &= 2(2 + y) && \text{αν } y > -2 \quad (2) \end{aligned}$$

Οι (1) και (2) γίνονται:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= -3 - 2y && \text{αν } y < -2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= 5 + 2y && \text{αν } y > -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma & \quad x^2 - 3y^2 - 12y - 9 = 0 \quad \text{για } y < -2 \\ \text{και} & \quad x^2 - 3y^2 - 20y - 25 = 0 \quad \text{για } y > -2. \end{aligned}$$

δηλαδή τα σύνολα των γυρίων είναι δύο υπερβολές, τα τμήματά τους, κάτω και πάνω από την ευθεία $y = -2$ αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{3} - \frac{(y+2)^2}{1} = -1 \quad \text{για } y < -2 \\ \text{και} & \frac{x^2}{100/2} - \frac{(y+20/6)^2}{100/36} = -1 \quad \text{για } y > -2. \end{aligned}$$

57. Εστω ορθοκανονικό σύστημα $(0, \vec{i}, \vec{j})$ και E_k το σύνολο των σημείων M του επιπέδου P με συντεταγμένες (x, ψ) ως προς το $(0, \vec{i}, \vec{j})$ που πληρούν την

$$2x\psi - x + 2k\psi + 2k(k-1) = 0 \quad (k \in \mathbb{R})$$

Θέτουμε $\vec{u} = \sqrt{2}/2(\vec{i} + \vec{j})$ και $\vec{v} = \sqrt{2}/2(-\vec{i} + \vec{j})$ και ονομάζουμε (X, Ψ) τις συντεταγμένες του M ως προς το σύστημα $(0, \vec{u}, \vec{v})$

1. Ναδειχτεί ότι η εξίσωση του E_k γράφεται στο $(0, \vec{u}, \vec{v})$:

$$\left[X + \frac{\sqrt{2}}{4}(2k-1) \right]^2 - \left[\Psi - \frac{\sqrt{2}}{4}(2k+1) \right]^2 = k(1-2k)$$

2. Ναδειχτεί ότι υπάρχουν δύο τιμές του k , για τις οποίες το E_k είναι η ένωση δύο ευθειών, των οποίων να δοθούν οι εξισώσεις ως προς το $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

3. Στη περίπτωση που το E_k είναι υπερβολή και πάντα στο σύστημα $(0, \vec{u}, \vec{v})$, να δοθούν:

- α. οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της
- β. το σύνολο που διαγράφουν τα κέντρα ω_k του E_k όταν το k μεταβάλλεται.

ΛΥΣΗ.

1. Στο πρόβλημα αυτό, φαίνεται ο ρόλος της αλλαγής συντεταγμένων αξόνων.

Θα βρώ τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων ενός διανύσματος, στα δύο συστήματα:

$$\begin{aligned} \text{Για το τυχόν } M(x, y) \text{ έχω} \\ \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{u} + \Psi\vec{v} = X\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + \Psi\frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{j}) = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - \Psi)\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(X + \Psi)\vec{j} \quad \text{άρα} \end{aligned}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - \Psi) \quad \text{και} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + \Psi)$$

Επομένως η εξίσωση των ελλείπων του E_k γράφεται:

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}(X - \Psi)\frac{\sqrt{2}}{2}(X + \Psi) - \frac{\sqrt{2}}{2}(X - \Psi) + 2k\frac{\sqrt{2}}{2}(X + \Psi) + 2k(k-1) = 0$$

$$\begin{aligned} \hat{=} \quad X^2 - \Psi^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(X - \Psi) + k\sqrt{2}(X + \Psi) + 2k(k-1) = 0 \quad \hat{=} \\ (X^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}X + k\sqrt{2}X) - (\Psi^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Psi - k\sqrt{2}\Psi) + 2k(k-1) = 0 \quad \hat{=} \end{aligned}$$

$$[X^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(2k-1)X] - [\Psi^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+2k)\Psi] + 2k(k-1) = 0$$

Προσδίδοντας και αφαιρώντας τις παραστάσεις

$$\frac{1}{8}(2k-1)^2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{8}(2k+1)^2 \quad \text{οι παραστάσεις, έχω}$$

αγκύρες γίνονται τέλεια τετράγωνα κι έχω:

$$[X + \frac{\sqrt{2}}{4}(2k-1)]^2 - [\Psi - \frac{\sqrt{2}}{4}(2k+1)]^2 = k(1-2k). \quad (1)$$

2. Για $k=0$ η (1) γίνεται

$$(X + \Psi - \frac{\sqrt{2}}{2})(X - \Psi) = 0 \quad (\text{δύο ευθείες στο } (O, \vec{u}, \vec{v}))$$

και για $k=\frac{1}{2}$ (1) $\Rightarrow (X + \Psi - \frac{1}{2})(X - \Psi + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$ (ομοίως).

3 α. Απλό. Η υπερβολή είναι ισοδυναμίας ($\alpha^2 = \beta^2 = k(1-2k)$) κ.λ.λ.

β. Το κέντρο της υπερβολής μας είναι το

$$(X_0, Y_0) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}(2k-1), \frac{\sqrt{2}}{4}(2k+1) \right). \text{ Έχουμε } \delta\eta\lambda\delta\iota$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{4X_0}{\sqrt{2}} &= -2k+1 \\ \frac{4Y_0}{\sqrt{2}} &= 2k+1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow X_0 + Y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} (2) \text{ δηλ. το κέντρο}$$

βρίσκεται στην ευθεία (2).

Έτσι τελικά ενώ στο σύστημα (O, \vec{i}, \vec{j}) η εξίσωση του Γ_k δίνε μας έλεγχε τίποτα, στο νέο σύστημα (O, \vec{u}, \vec{v}) ήταν μια υπερβολή που μελετήθηκε.

58. Θεωρούμε τις καμπύλες Γ και Γ' που δίνονται αντιστοίχα απ τις :

$$\Gamma: 6x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 6 = 0$$

$$\Gamma': 4x^2 + 49y^2 - 6x + 294y + 26 = 0$$

1. Να προσδιοριστέ το είδος των καμπύλων και να δείχτε ότι έχουν το ίδιο κέντρο.

2 Ή αλλιώς να χαρακτηρίσετε τους στοιχείους, (εστίες, ασύμπτωτες κλπ)

3. Να χαραχτούν οι Γ και Γ'

(BACC. GUYANE 1984)

ΛΥΣΗ

1) Με τις γνωστές διαδικασίες έχω :

$$(C): \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

$$(C'): \frac{(x-2)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1.$$

Πρόκειται η (C) υπερβολή και η (C') ελλειψη, έχουν το ίδιο κέντρο (2, -3).

2) Λήγō.

3) Απλō.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜ.

59. Δίνονται στο επίπεδο δύο σημεία, τα Α και Β. Εστω Μ, τρίτο σημείο, διάφορο του Α, και κατασκευάζουμε το τετράγωνο ΑΡΜQ, με διαγώνιο την ΑΜ, έτσι ώστε $(\vec{AP}, \vec{AQ}) = \pi/2$.

Να καθοριστέ το σύνολο των σημείων Μ, των σημείων Ρ και των σημείων Q έτσι ώστε :

$$BP^2 + BQ^2 = 2AM^2$$

(BACC. SERIE C 1983)

60. Εστω Α, το σημείο με συντεταγμένες (1,0) και ονομάζουμε ΑΒΓ, το ισοπλευρο τρίγωνο που είναι εγγεγραμμένο, μέσα στο κύκλο, με κέντρο Ο, και ακτίνα 1. Οι παράλληλες απ' το Ο, στις ευθείες ΑΒ και ΑΓ, τέμνουν την ΒΓ, στα Β' και Γ'.

Ονομάζουμε Δ, το σύνολο των ευθειών (D), που περνούν απ' το Ο, και τέμνουν την ευθεία ΒΓ σε σημείο διακεκριμένο των Β', Γ', που βρίσκεται μεταξύ των Β' Γ' (εσωτερικό σημείο)

1. Να γράψετε μια εξίσωση των ευθειών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ.

2. Να δείξετε ότι μια ευθεία (D), ανήκει στο Δ, αν και μόνο αν, περιγράφεται από εξίσωση της μορφής $\psi = \alpha \chi$, όπου $\alpha \in (-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$.

3. Να δείξετε, ότι κάθε ευθεία (D) ∈ Δ, τέμνει και τις τρεις ευθείες ΑΒ, ΑΓ, και ΒΓ στα σημεία Ρ, Q, R.

(BACC. SERIE E 1983)

61. Εστω O , A και B , τρία σημεία ενός επιπέδου. Ένας κύκλος (C) περνάει απ'τα O και A . Ένας άλλος (C') απ'τα O και B . Οι δύο αυτοί κύκλοι μεταβάλλονται, έτσι ώστε οι εφαπτόμενες τους στο O , παραμένουν ορθογώνιες (κάθετες). Εστω M το δεύτερο κοινό σημείο των δύο κύκλων. Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος των σημείων M .

(BACC. SERIE C 1983)

62. Εστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Στο εξωτερικό του κατασκευάζουμε τα ισοπλευρά τρίγωνα, $A'B'\Gamma$, $AB'\Gamma'$ και $AB\Gamma''$

1. Να συγκριθούν τα τρία διανύσματα $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{\Gamma\Gamma'}$ στο μέτρο και στη διεύθυνση.

2. Εστω I , το σημείο τομής των $\Gamma\Gamma'$ και BB' . Να δειχτεί ότι το I είναι κοινό σημείο των κύκλων $(AB\Gamma')$, $(AB'\Gamma)$ και $(AB\Gamma'')$. Να συμπεράνετε, ότι οι ευθείες AA' , BB' και $\Gamma\Gamma'$ συγκλίνουν στο I .

3. Υποθέτουμε, ότι το I , είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$. Παίρνουμε ένα σημείο D , πάνω στο τμήμα IB , και έξω απ'αυτό (εξωτερικό σημείο) έτσι ώστε $DB=IG$. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου $A'DID$ και να δειχτεί, ότι $AA''=IA+IB+IG$.

(BACC. SERIE E 1984)

63 Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα AB , μήκους a . Ένα σημείο K , μετακινείται, πάνω σ' αυτό το τμήμα. Να κατασκευαστούν, απ' την ίδια πλευρά του AB , τα ισοπλευρά τρίγωνα PAK και QKB , και έστω Γ , το σημείο τομής των ευθειών AP και BQ .

1. Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος του μέσου O του PQ .
2. Να δειχτεί, ότι η μεσοκάθετη του PQ , περνάει απ' το κέντρο G , του περιγεγραμμένου κύκλου, στο τρίγωνο $AB\Gamma$.
3. Να δειχτεί ότι, το σημείο G , είναι το κέντρο των περιγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα PAQ .
4. Να βρεθεί ο γεωμ. τόπος του κέντρου του περιγ. κύκλου στο τρίγωνο ΓPQ .
5. Κατασκευάστε το PQ .

(EACC. E, 1983)

64 Έστω ισοσκελές τρίγωνο OAB ($OA=OB$). Έστω OH το ύψος. Έστω επίσης (O) το σύνολο των κύκλων με κέντρο το O , και $ΑΓ$ και $ΒΔ$ ($\Gamma, Δ \in O$) οι εφαπτόμενες απ' τα A και B στοχ τυχόντα κύκλο που δεν είναι όμως συμμετρικές ως προς το ύψος OH .

1. Να βρεθούν οι γεωμ. τόποι των Γ και Δ , καθώς και του σημείου τομής K των $ΑΓ$ και $ΒΔ$.
2. Να δειχτεί ότι η ευθεία $\Gamma Δ$ περνάει απ' το σημείο H .
3. Να δειχτεί ότι, οι διχοτόμοι της γωνίας \widehat{AKB} , περνούν από σταθερά σημεία.

(EACC. E 1983)

65 δίνεται η συνάρτηση $F(x) = x - \sqrt{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ι. Να μελετηθεί και να χαρακτηρίσει η καμπύλη της C , σε ορθοκανονικό σύστημα. Έστω C το τμήμα της C_1 με αρνητικές τετμημένες και C_2 το αντίστοιχο, με θετικές.

2. Έστω α , πραγματικός και θετικός αριθμός και θεωρούμε τα σημεία M και P της C_2 με τετμημένες αντίστοιχα $(\alpha-1)^2$ και $(\alpha+1)^2$. Έστω επίσης K το μέσο του τμήματος MP .

α. Να καθοριστούν οι συντεταγμένες του K όταν το $\alpha \in (0,1)$ και να χαρακτηρίσει το σύνολο των σημείων K .

β. Ομοίως όταν $\alpha > 1$

3. Έστω D_λ η ευθεία με εξίσωση $\psi = x - \lambda$ με $\lambda > 0$. Ονομάζουμε M και M_2 τα σημεία τομής της D_λ με τις C_1 και C_2 αντίστοιχα.

α. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων που διαγράφει το μέσο I του $M_1 M_2$, όταν το λ , μεταβάλλεται.

β. να υπολογιστεί το μήκος του $M_1 M_2$

γ. Έστω $A(3/2, 3/2)$. Θεωρούμε ένα νέο σύστημα αξόνων ορθοκανονικό (A, I, J) , έτσι ώστε $(\hat{I}, \hat{J}) = \pi/4$. Έστω M'_1 σημείο της ευθείας $M_1 M_2$, που ανήκει στον άξονα \overrightarrow{AI} του νέου συστήματος και M'_2 τέτοιο ώστε $\overrightarrow{M'_1 M'_2} = \overrightarrow{M_1 M_2}$. Να εκφράσετε συναρτήσει του λ , τις συντεταγμένες x_2 και y_2 του M'_2 , στο σύστημα (A, \hat{I}, \hat{J}) . Να βρεθεί ο τύπος που διαγράφει το M'_2 όταν το λ μεταβάλλεται. Να γίνει η γραφική του παράσταση.

(BACC C. LAKAR 1984)

66. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\Lambda\Gamma\Gamma'$, ($\Lambda\Gamma=\Lambda\Gamma'=3\alpha$) και $\Gamma\Gamma'=2\alpha$

1. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων M του επιπέδου, έτσι ώστε: $2MA^2 + 3MB^2 + 3M\Gamma^2 = 8\alpha^2$

2. Ομοίως το σύνολο E των σημείων M ώστε $2MA^2 + 3MB^2 + 3M\Gamma^2 = 22\alpha^2$

3. Ναδειχτεί ότι οι ευθείες $E\Gamma'$, ΛB , και $\Lambda\Gamma'$ έχουν κάθε μια ένα μοναδικό κοινό σημείο με το σύνολο E .

(BACC. C GUYANE 1984)

67. Σε τρισσογώνιο σύστημα δίνονται τα σημεία $A(3,2,3)$ $B(9,2,11)$ $\Gamma(6,-3,7)$.

1. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι ορθογώνια.

2. Να δοθεί μια εξίσωση του επιπέδου P που ορίζουν τα σημεία A , B και Γ .

3. Να δοθεί η εξίσωση της σφαίρας S , διαμέτρου AB καθώς και οι συντεταγμένες του κέντρου της.

(BACC. C ANTILLES 1984)

68. Εστω $\Lambda\Gamma\Gamma'$ ισοπλευρο τρίγωνο και θεωρούμε την απεικόνιση Φ , ώστε σε κάθε σημείο M του επιπέδου συνδέουμε τον πραγματικό αριθμό

$$\phi(M) = MA^2 + 2MB^2 - M\Gamma^2.$$

Εέτουμε $|\vec{A\Gamma}| = \alpha$ με $\alpha > 0$

1. Εστω το σημείο G που ορίζεται: $\vec{G\Gamma} = \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$
Να υπολογιστεί το GA^2 , GB^2 και $G\Gamma^2$ συναρτήσει του α .

2. Να καθοριστέ το σύνολο Γ των σημείων M που πληρούν την $\pi(M)=\alpha^2$

(BACC. E BOULON)

69. Έστω κινητό σημείο M στο επίπεδο, του οποίου οι συντεταγμένες δίνονται συναρτήσει του χρόνου από τις εξισώσεις: $x=2/\sin t$ $y=\sqrt{5}\frac{\sin t}{\eta \mu t}$ με $t \in (0, \pi)$

1. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες της ταχύτητας στη χρονική στιγμή t . Να δείχτε ότι η τροχιά του κινητού, T , είναι τμήμα μιας υπερβολής (H) με εξίσωση $5x^2-4y^2=20$. Να κατασκευαστεί η (H) και να καθοριστέ το T (τροχιά)

2. Να καθορίστε τα τμήματα της T , όπου η κίνηση επιταχύνεται ή επιβραδύνεται.

3. Να ορίσετε τις κορυφές, τις εστίες και τις διευθετούσες της υπερβολής (H) .

4. Να δείχτε ότι η τεταγμένη του M , παίρνει κατά τη διάρκεια της κίνησης, μία και μοναδική φορά την τιμή $4\sqrt{5}/3$.

Ποιά είναι τότε η τετμημένη του M ;

Για αυτή τη θύση του M , υπολογίστε την απόσταση του από την εστία της (H) με θετική τετμημένη.

(BACC E LILLE)

ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΣΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

70.Α Δίνεται η συνάρτηση : $f_\mu(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + \mu})$ ($\mu \in \mathbb{R}$)
και συμβολίζουμε με D_μ το πεδίο ορισμού της, καθώς
και I_μ το πεδίο τιμών της και C_μ την καμπύλη της.

1. Να καθοριστούν τα σύνολα D_μ για τα διάφορα μ .
2. Να μελετηθούν οι μεταβολές των f_μ στα D_μ .
3. Να χοραχτούν οι καμπύλες C_{-1} , C_0 , C_1 .
4. Να προσδιοριστούν τα σύνολα $I_\mu = f_\mu(I_\mu)$. Να

δειχτεί ότι οι f_μ είναι 1-1 για κάθε μ .

Β Θεωρούμε απ τις $f_\mu(x)$ τις f_1 και f_{-1}

1α. Να δειχτεί ότι $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1/2 [f_1^2 - f_{-1}^2] = x$

β. $\forall x \in [1, \infty)$, $1/2 [e^{f_1(x)} + e^{f_{-1}(x)}] = x$

γ. Να οριστούν οι αντίστροφες συναρτήσεις φ_1

και φ_{-1} των f_1 και f_{-1}

2. Θεωρούμε την $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Να δειχτεί
ότι $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_{-1}(x)}$ και ότι $\varphi(x)^2 < 1$

3. Να δειχτεί ότι η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη
και ότι $\varphi'(x) = 1 - \varphi^2(x)$.

4. να μελετηθούν οι μεταβολές της φ ,
και να δειχτεί ότι υπάρχει η αντίστροφή της
με πεδίο ορισμού το $(-1, 1)$

Να επαληθεύσετε (αν ονομάσουμε $\tau(x)$ την αντίστρο-
φη της $\varphi(x)$) ότι $\tau(0) = 0$ και επίσης:

$$\tau'(x) = \frac{1}{1 - \varphi^2}$$

ΛΥΣΗ.

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} \text{Θα πρέπει } \forall \mu \in \mathbb{N} \quad x^2 + \mu > 0 \\ \text{και } x + \sqrt{x^2 + \mu} > 0 \end{array} \right\} (1)$$

Όταν $\mu > 0$ οι (1) πληρούνται $\forall x \in \mathbb{R}$. Σηλ. $D_\mu = \mathbb{R}$

Όταν $\mu = 0$ η (1) γίνεται $x + \sqrt{x^2} = x + |x|$. Για να είναι $x + |x| > 0$, πρέπει $x > 0$ Σηλ. $D_\mu = \mathbb{R}_+^*$.

Όταν είναι $\mu < 0$, η (1) α, ισχύει στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{|\mu|}) \cup (\sqrt{|\mu|}, +\infty)$ (ση τη λύση της ανίσωσης), ενώ η (1) β, μόνον στο $(\sqrt{|\mu|}, \infty)$, το οποίο είναι το D_μ .

Τελικά λοιπόν έχουμε:

$$D_\mu = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{όταν } \mu > 0 \\ \mathbb{R}_+^* & \text{όταν } \mu = 0 \\ (\sqrt{|\mu|}, \infty) & \text{όταν } \mu < 0 \end{cases}$$

2. Μεταβολές της $f_\mu(x)$

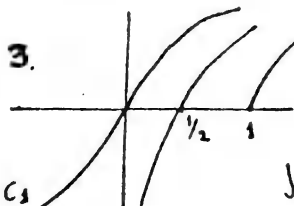
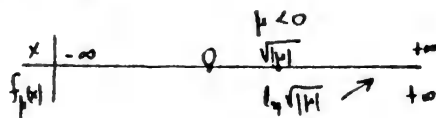
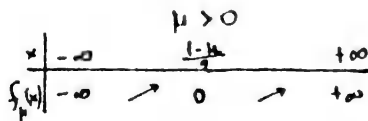
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_\mu(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_\mu(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x^2 - x^2 - \mu}{x - \sqrt{x^2 + \mu}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{-\mu}{x - \sqrt{x^2 + \mu}} \right).$$

Το όριο αυτό όταν $\mu > 0$ είναι το $-\infty$, ενώ όταν $\mu < 0$

δεν ορίζεται η $f_\mu(x)$ στο \mathbb{R}_- .

Είναι $f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \mu}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, όπου η $f_\mu(x) \nearrow \forall \mu \in \mathbb{R}$.

Οι πινακές μεταβολών είναι



Είναι $f_\mu''(x) = \frac{-x}{(x^2 + \mu)^{3/2}}$ όπου

τα κοίτα "κάτω", στο $(0, \infty)$.

Η C_{-1} είναι η καμπύλη $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$$4. \lambda > 0 \Rightarrow I_f = \mathbb{R}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow I_f = \mathbb{R}$$

$\lambda < 0 \Rightarrow I_f = [0, \infty)$. (Οδηγητικά των πεδίων τιμών είναι οι καρμπύλες C_1, C_0, C_{-1} . Πρέπει να προκύπτει ότι η f_μ είναι 1-1 $\forall \mu \in \mathbb{R}$.)

$$B. 1 \text{ a. } \frac{1}{2} \left[x + \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right] = x$$

$$b. \frac{1}{2} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right] = x$$

$$y = f_1(x) \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 + 1} = e^x \Leftrightarrow y^2 + 1 = e^{2x} + y^2 - 2e^x y \Leftrightarrow \phi_1 = f_1^{-1}(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x}$$

$$\text{Ομοίως } \phi_{-1} = f_{-1}^{-1}(x) = \frac{e^x + 1}{2e^x}$$

$$2. \phi(x) = \frac{\phi_1(x)}{\phi_{-1}(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x(e^x - \frac{1}{e^x})}{e^x(e^x + \frac{1}{e^x})} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\phi^2(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2} < 1 \quad (\phi \neq \pm 1).$$

$$3. \phi'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \phi^2(x). \text{ Άρα η περιγραφή της } \phi(x) \text{ ορίζεται έστω στο } \mathbb{R}.$$

$$4. \text{ Πρέπει } \phi'(x) < 1 \Rightarrow \phi'(x) > 0 \Rightarrow \neg \phi(x) \nearrow \text{ στο } \mathbb{R}. \\ \text{Είναι } \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(x) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^{2x}})}{e^x(1 + \frac{1}{e^{2x}})} = 1.$$

lim_{x→-∞} φ(x) = -1 (ομοίως). Άρα πεδίο τιμών το (-1, 1) και φ(x) εάν αζούδα, είναι 1-1. Άρα υπάρχει γ φ⁻¹(x) = τ(x) : (-1, 1) → R. Αυτή βρίσκεται με τη γνωστή διαδικασία:

$$\phi(x) = y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \text{ Σηλ } \phi^{-1}(x) = \tau(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$\text{Είναι } \tau'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$\left(\text{Είναι } \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \frac{1-x}{1+x} \text{ αφού } -1 < x < 1 \right).$$

71. Θεωρούμε την $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$

1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της.

2. Να παρασταθεί γραφικά. Από τη γραφική της παράσταση να εξαχθεί συμπέρασμα για το πλήθος και το πρόσημο των ριζών της, εξίσωσης.

$$f(x) = a \quad a \in \mathbb{R}.$$

3. Να βρεθούν υπολογιστικά οι ρίζες αυτές.

(ΒΑΘΜ. Ο. 1983)

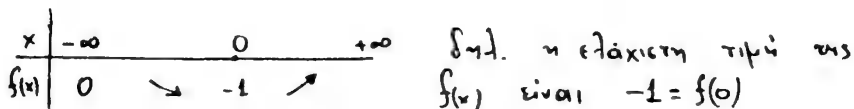
ΛΥΣΗ.

$$1. f'(x) = e^{x \ln 4} \cdot \ln 4 - e^{(x+1) \ln 2} \cdot \ln 2 = 4^{x/2} \cdot \ln 4 - 2^{x/2} \cdot \ln 2 = 2^{x/2} \cdot 2 \cdot \ln 2 - 2^{x/2} \cdot \ln 2 = 2^{x/2} \cdot \ln 2 \cdot (2 - 1) = 2^{x/2} \cdot \ln 2. \text{ Άρα } 2^{x/2} \cdot \ln 2 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ ή } f(x) \uparrow.$$

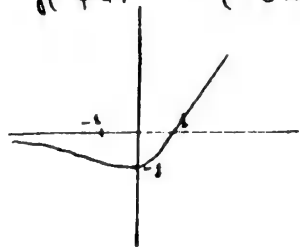
και για $x < 0$ η $f(x) \downarrow$.

$$\lim_{\infty} (4^x - 2^{x+1}) = \lim_{\infty} 2^x (2^x - 2) = +\infty$$

$$\lim_{-\infty} (4^x - 2^{x+1}) = \lim_{\infty} \frac{1}{2^x} \left(\frac{1}{2^x} - 2 \right) = 0$$



2. Η $f'(x) = 2^{x+1}(2^x - 1)$ δηλ. μηδενίζεται για $x = -1$ που είναι σημείο καμπής. Ασύμπτωτος η $y = 0$. Η γραφική παράσταση είναι:



Απ' τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η $f(x) = a$ (που οι λύσεις της γραφικά σχηματίζουν τα σημεία τομής της καμπύλης μας και της $y = a$), παρουσιάζει την εξής κατανομή ριζών:

Για $a < -1$ δεν έχει λύση (0 κοινά σημεία), για $-1 < a < 0$ έχουμε δύο λύσεις, ετερόσημες και για $a > 0$, μία λύση θετική.

3. Θα δείξουμε αλγεβρικά τα παραπάνω πορίσματα, για τις διάφορες τιμές του a .

$$f(x) = a \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x = a \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{Ή} \Leftrightarrow 2^x = u \Rightarrow$$

$$u^2 - 2u - a = 0 \Rightarrow u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+a}. \quad \text{Άρα για } a < -1, \text{ δεν}$$

έχω λύσεις, ενώ συνέχεια έχω (αν $a \geq -1$)

$$2^x = 1 + \sqrt{1+a} \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1 + \sqrt{1+a})}{\ln 2} \text{ που ορίζεται πάντα}$$

$$\text{και } 2^x = 1 - \sqrt{1+a} \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1 - \sqrt{1+a})}{\ln 2}, \text{ όπου πρέπει } 1 - \sqrt{1+a} > 0 \Leftrightarrow$$

$1+a < 1 \Leftrightarrow a < 0$. Δηλ. η δεύτερη λύση, υπάρχει μόνο αν, $a > 0$, όπως είχε φανεί απ' τη γραφική λύση.

72. Θεωρούμε την $f_v(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[v]{x}}$ που ορίζεται στο \mathbb{R}_+ . (Ειδικά η $f_1(x) = \ln x/x$).

1. Να δοθεί ο πίνακας μεταβολών της.

2. Εστω (C_v) η καμπύλη που αντιστοιχεί στην $f_v(x)$.

α. Εστω επίσης v, μ δύο φυσικοί: Οκνίμ Να εξακριβωθεί η σχετική θέση των $(C_v), (C_\mu)$

β. Να χαρακτηούν οι C_1, C_2 .

(BACC. C 1983)

$\ln x$ = ανεπέρειος λογάριθμος του x .

ΛΥΣΗ

$$1. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow \infty} f_v(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[v]{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{v} x^{\frac{1-v}{v}}} =$$

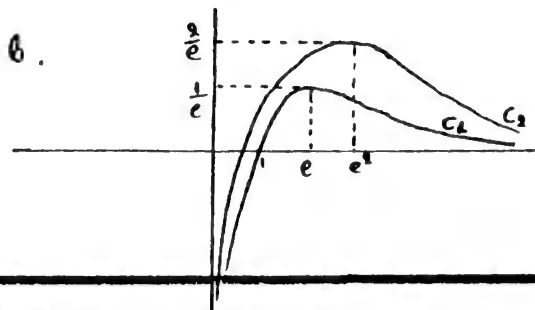
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{v}{\sqrt[v]{x}} = 0. \text{ Ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt[v]{x}} = -\infty$$

$$f'_v(x) = \frac{\frac{1}{x} \sqrt[v]{x} - \ln x (\frac{1}{v} \sqrt[v]{x})}{\sqrt[v]{x^2}} = \frac{v - \ln x}{v x \sqrt[v]{x}} \text{ άρα αν } v - \ln x > 0$$

$\Leftrightarrow x < e^v$ η $f_v(x) \nearrow$ ενώ για $x > e^v$ η $f_v(x) \searrow$.

x	0	e^v	∞
$f_v(x)$	$-\infty$	$\frac{v}{e}$	0

2. α. Για τις C_v υπάρχουν οριζόντια ($y=0$) και κατακόρυφη ($x=0$) ασύμπτωτη.
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_v(x) < f_p(x)$ δηλ. η C_p βρίσκεται "πάνω", απ' τη C_v . Επίσης τα ακρότατα πληρούν:
 $\frac{v}{e} < \frac{p}{e}$ δηλ. έχουμε μια μετάθεσή τους, προς τα δεξιά.



73. 1. Εστω η $f(x) = \ln(\ln x)$ του $(1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.
 Να υπολογιστεί η $f'(x)$.

2. Εστω $n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2$: να δειχτεί ότι
 $0 < \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) < \frac{1}{n \ln n}$

3. Εέτω
 $S_n = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{n \ln n}$. Να δειχτεί ότι $S_n \rightarrow \infty$

(BACC. C 1983)

ΛΥΣΗ.

1. $[\ln(\ln x)]' = \frac{1}{x \ln x}$

2. Χρησιμοποιώ το 0. μέγιστη τιμή για την
 $f(x) = \ln(\ln x)$ στο $(n, n+1)$ ω.τ. τότε $\exists \xi \in (n, n+1)$:
 $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) = \frac{1}{\xi \ln \xi}$

$$\text{Είναι } k < \xi < k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{k} \quad (\alpha)$$

$$\Rightarrow \ln k < \ln \xi < \ln(k+1) \Rightarrow \frac{1}{\ln(k+1)} < \frac{1}{\ln \xi} < \frac{1}{\ln k} \quad (\beta)$$

$$(\alpha) \wedge (\beta) \Rightarrow 0 < \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \frac{1}{\xi \ln \xi} < \frac{1}{k \ln k} \Rightarrow \text{o.t.s.}$$

3. Εφαρμόζω την προηγούμενη σχέση για $k=2, 3, \dots, n$

$$\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2) < \frac{1}{2 \ln 2}$$

$$\ln(\ln 4) - \ln(\ln 3) < \frac{1}{3 \ln 3}$$

.....

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) < \frac{1}{n \ln n} \quad \text{Με πρόσθεση}$$

$$\text{Έχω: } \Delta_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) < S_n \text{ άρα}$$

$$\lim \Delta_n < \lim S_n \quad \alpha \lambda \lambda \alpha \quad \lim \Delta_n = \infty \quad \alpha \rho \alpha \Rightarrow S_n \rightarrow +\infty.$$

74. Α. Ι. Να βρεθούν τα όρια από δεξιά στο σημείο 1, των:

$$\frac{\frac{1+\ln x}{x-1}}{\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}} \quad \frac{x-1-\ln x}{\ln x} \quad \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$$

2. Να μελετήσετε τις μεταβολές και το πρόσημο της $\gamma(x): [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\gamma(x) = x - 1 - \ln x$.
Να εξαχθεί ότι $\forall x \geq 1$ έχουμε $1 + \ln x \leq x$

Β. Ι. Έστω η $f(x) = \ln(1 + \ln x)$. Να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$ και να συμπεράνετε ότι το $\frac{f(x)}{x-1}$ τείνει στο 1 όταν $x \rightarrow 1^+$.

Γ. Εστω η $\Phi(x) = \begin{cases} \int_{\ln x}^x \frac{1}{\ln t} dt & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

1. Να δικαιολογήσετε τον ορισμό της $\Phi(x)$ για $x > 1$.
 2. Να δείξετε μέσω του τύπου της διάταξης του ολοκληρώματος, ότι για $x > 1$

$$\frac{x-1-\ln x}{\ln x} \leq \Phi(x) \leq \frac{x-1-\ln x}{\ln(1+\ln x)}. \text{ Να εξαχθεί ότι η}$$

$\Phi(x)$ είναι συνεχής στο $+$

3α. Θεωρώ την $g(t) = 1/\ln t$ στο $(1, \infty)$ και G μια αρχική της g στο $(1, \infty)$. Να εκφράσετε την $\Phi(x)$ συναρτήσει των τιμών της G για $x > 1$. Να υπολογίσετε λοιπόν την $\Phi'(x)$.

β. Απ' τα προηγούμενα ναδειχτεί ότι η $\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 1^+ . Να βρεθεί η $\Phi'(x)$.

(BACC. E. 1983)

ΛΥΣΗ.

A. 1. $\lim_{1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{1^+} \frac{1/x}{1} = 1.$

$$\lim_{1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} = \lim_{1^+} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{1^+} \frac{x-1-\ln x}{\ln x} = \frac{0}{0} = \lim_{1^+} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \dots = \lim_{1^+} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

2. $\lim_{\infty} \gamma(x) = \infty \quad \lim_{1^+} \gamma(x) = 1-1-0=0$

$\gamma'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ που είναι $\gamma'(x) > 0$ αν $x > 1$ άρα στο $(1, \infty)$ η $\gamma(x)$ \nearrow $\{x\}$. είναι $\gamma(x) > 0 \quad \forall x \in [1, \infty) \Rightarrow$

x	1	$+\infty$
$\gamma(x)$	0	$+\infty$

$$= 1 + \ln x \leq x \quad \forall x \geq 1.$$

B. 1. $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$ άρα $f'(1) = 1$

Άλλα $f(1) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1}$.

Γ. 1. Πρέπει τα όρια του ολοκληρώματος να ορίσουν διάστημα στο \mathbb{R} , δηλ. $1 + \ln x < x$, που ισχύει $\forall x > 1$ απ την A_2 .

2. Είναι γνωστό ότι $\mu(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

Στη περίπτωση μας $M = \frac{1}{\ln(1+\ln x)}$ και $\mu = \frac{1}{\ln x}$

αφού $\mu = \frac{1}{\ln x}$ στο διάστημα ολοκληρώσεως είναι συνεχής.

Έτσι $\frac{x-1-\ln x}{\ln x} \leq \phi \leq \frac{x-1-\ln x}{\ln(1+\ln x)}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \phi(x) = 0$ και $\phi(0) = 0$ άρα η ϕ συνεχής.

(Παίρνω τα όρια των άκρων της προηγούμενης ανισότητας).

3. α. Είναι $G'(t) = \frac{1}{\ln t}$. Επομένως $\Phi(x) = \int_{1+\ln x}^x \frac{1}{\ln t} dt =$

$= G(x) \Big|_{1+\ln x}^x = G(x) - G(1+\ln x)$. Άρα $\Phi(x) = G(x) -$

$- G(1+\ln x)(1+\ln x)' = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x \ln(1+\ln x)}$

β. $\phi'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\Phi(x) - \Phi(1)}{x - 1}$ άλλα

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1) \ln x} \leq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\Phi(x)}{x-1} \leq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(x-1) \ln(1+\ln x)}$

γιατί, η ανισότητα δεν αλλάζει, αφού $x-1 > 0$.
 Άλλα τα αμφοτέρω όρια είναι ίσα με $-\frac{1}{2}$,
 το οποίο είναι η ζητούμενη παράγωγος.

75. Θεωρώ τις $f_1(x) = \sqrt{2x + \sqrt{2x^2 + 1}}$, $f_2(x) = \sqrt{2x - \sqrt{2x^2 + 1}}$

A. 1. Να γίνει η γραφική παράσταση C_1 της f_1 .

Να δειχτεί ότι η C_2 , καμπύλη της f_2 , είναι συμμετρική της C_1 ως προς το κέντρο των αξόνων.

2. Να δειχτεί ότι, αν M είναι σημείο της C_1 με τετμημένη x , N σημείο της C_2 με την ίδια τετμημένη και H η προβολή του M , στον $Ox \Rightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HN} = -1$

3. Εστω C η ένωση των C_1 και C_2 . Να δειχτεί ότι το (x, ψ) ανήκει στο C αν και μόνο αν $\psi'' - 2\sqrt{2}x\psi - 1 = 0$

B. 1. Δείξτε ότι η $LN f_1(x)$ ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$

2. Εστω $g(x) = LN f_1(x)$. Να μελετηθεί η PARITY.

3. Μεταβολές της g . Να γίνει η γραφική της παράσταση.

4. Να δειχτεί ότι υπάρχει η αντίστροφη της g .
 Να χαρακτηρίσει η καμπύλη της.

5. Να δειχτεί η σχέση: $\forall x \in \mathbb{R} (2x^2 + 1)g''(x) + 2xg'(x) = 0$

6. Να αποδειχτεί επαγωγικά η σχέση:

$$(2x^2 + 1)g^{(n+2)}(x) + 2(2n+1)xg^{(n+1)}(x) + 2n^2g^{(n)}(x) = 0$$

Να εξαχθούν οι αριθμητικές τιμές των διαδοχικών παραγώγων της στο $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

A. 1. Μεταβολές της $f_2(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2 - 1}{\sqrt{2}x - \sqrt{2x^2 + 1}} = 0$$

Η καμπύλη C_1 , βρίσκεται στο κλειστό με θετικές τεταγμένες.

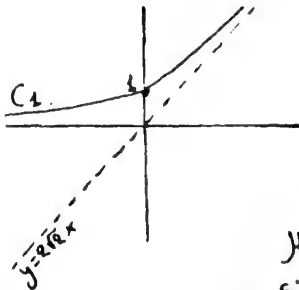
Μονοτονία: $f_1'(x) = \sqrt{2} + \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+1}} \right) =$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ άρα } f_1(x) \uparrow$$

Ασύμπτωτα: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} \right] = 2\sqrt{2} = \alpha$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f_1(x) - \alpha x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1} - 2\sqrt{2}x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^2+1-2x^2}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x} \right] = 0 \quad \text{δηλ } y = 2\sqrt{2}x \text{ ασύμπτωτος.}$$



Τελικά, γραφικά η $f_1(x)$ είναι:

$$\text{Είναι } f_2(-x) = -\sqrt{2}x - \sqrt{2x^2+1} = -f_1(x)$$

Η σχέση αυτή δείχνει, ότι οι C_2, C_1

είναι συμμετρικές ως προς O .

(λ. ήταν $f_2 = f_1 = f$, η σχέση f θα ήταν περιττή)

2. Είναι $M(x, f_1), N(x, f_2), H(x, 0)$. Άρα
 $\vec{HM} = (0, f_1) \quad \vec{HN} = (0, f_2) \Rightarrow \vec{HM} \cdot \vec{HN} = f_1 f_2 = -1$

3. $(x, y) \in (C_1 \cup C_2) \Leftrightarrow (x, y) \in C_1 \vee (x, y) \in C_2 \Leftrightarrow$
 $(y = \sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1}) \vee (y = \sqrt{2}x - \sqrt{2x^2+1}) \Leftrightarrow$

$$(y - \sqrt{2}x - \sqrt{2x^2+1})(y - \sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y - \sqrt{2}x)^2 - (2x^2+1) = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xy - 2x^2 - 1 = 0 \quad \text{ο.ε.δ.}$$

B.1. $\ln(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1})$. Πρέπει $\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1} > 0$. Αυτή
 ισχύει πάντα γιατί: $\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1} = \sqrt{2}x + |\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}x}|$.

Αν $x > 0$ γίνεται $x(\sqrt{2} + \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}) > 0 \quad \forall x > 0$

Αν $x < 0$ γίνεται $x(\sqrt{2} - \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}) > 0$ γιατί έχουμε
 αρνητικούς όρους.

$$2. \quad g(-x) = \ln(\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}x) = \ln \frac{1}{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x} =$$

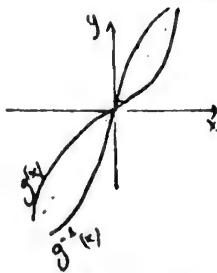
$$= -\ln(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x) = -g(x). \quad \text{Άρα περιττή.}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow g \rightarrow -\infty \quad (\text{αφού } f_1 \rightarrow 0)$$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^2+1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g''(x) = \frac{-2\sqrt{2}x}{(2x^2+1)^{3/2}} \quad \text{Άρα } x=0 \text{ είναι μέγιστο,}$$

και έτσι σε τιμές x , τα κοίτα "άνω".



$$4. \quad \text{Είναι } g(x) = \ln(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1}) \Leftrightarrow g^{-1}(x) = e^{\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1}}$$

με γραμμική παράσταση, συμμετρικά της $g(x)$ ως προς $y=x$.

$$5. \quad \text{Αντίη. Είναι } \sim P(k). \quad \text{Έστω ισχύει } \sim P(k),$$

θα δείξω ότι ισχύει $\sim P(k+1)$

$$P(k): (2x^{k+1})g^{(k+2)} + 2(2x^{k+1})x \cdot g^{(k+1)} + 2^k x^2 g^{(k)} = 0$$

$$\Rightarrow 4x g^{(k+1)} + (2x^{k+1})g^{(k+2)} + 2(2x^{k+1})g^{(k+1)} + 2(2x^{k+1})x \cdot g^{(k+1)} + 2x^2 g^{(k+2)} = 0$$

$$\Rightarrow (2x^{k+1})g^{(k+2)} + 2x(2x^{k+1})g^{(k+2)} + 2(x^{k+1})^2 g^{(k+1)} = 0 \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Είναι $g'(0)=0$ $g''(0)=0$, απ' τού αναδρομικό τύπο προκύπτει ότι $\underline{g^{(n)}(0)=0 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$.

76. Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{για } x < 0 \\ 0 & \text{" } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{για } x > 0 \end{cases}$$

1. Είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $x=0$;
2. Να μελετηθούν οι μεταβολές της.
3. Αν (Γ) είναι η καμπύλη της γραφικής παράστασής της $f(x)$, να δείξετε ότι η $\psi=x+1$, είναι ασύμπτωτη της (Γ) . Να χαρακτηρί η (Γ) .

(BACC. C 1983)

ΛΥΣΗ.

$$1. \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

$$\text{Ομοίως } f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \quad \text{Άρα } f'(0) = 0$$

$$2. \quad \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = \infty. \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad \text{Για } x > 0 \Rightarrow f'(x) = x(1 + 2 \ln x) \quad \text{άρα}$$

$$\text{για } x > \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \text{και για } 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$\text{για } x < 0, \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0 \quad \text{για } (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) \nearrow$$

x	$-\infty$	0	$1/\sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\frac{1}{2e}$	$+\infty$

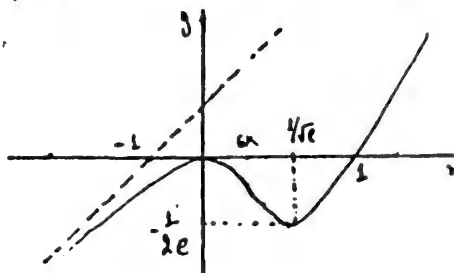
Για κυρτά - κοίτα παρατηρώ
 $x > 0, f''(x) = 3 + 2 \ln x$ άρα τα κοίτα άνω για $x > e^{-3/2}$ (δυ.)
 $x < 0, f''(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{e^{1/x}}{x} < 0 \quad \forall x < 0$ άρα στο \mathbb{R}_- τα κοίτα κάτω.

3. Ασύμπτωτοι

Εξετάζω το όριο:

$$\begin{aligned} \lim_{-\infty} (xe^{1/x} - x - 1) &= \lim_{-\infty} x(e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x}) = \\ &= \lim_{-\infty} \frac{e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{-\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x} + \frac{1}{x^2}}{-1/x^2} = \lim_{-\infty} (e^x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Άρα η $y = x + 1$ ασύμπτωτος στο $-\infty$.
 Η γραφική παράσταση λοιπόν είναι:



77. Εστω η $f_\mu(x) = (x + \mu)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ και C_μ η αντίστοιχη καμπύλη.

Α. 1. Μεταβολές της $f_\mu(x)$.

2. Να δειχτεί ότι ο $χχ'$ είναι ασύμπτωτος της $f_\mu(x)$

3. Να δειχτεί ότι οι ρίζες των f_μ, f'_μ, f''_μ αποτελούν αριθμ. πρόοδο. Εστω H_μ το σημείο της C_μ , όπου η ε,α-ποτομένη της είναι // του Ox . Να γραφεί η εξίσωση που πληρεί το σύνολο (Γ) των σημείων H_μ , όταν το μ διαγράφει το \mathbb{R} .

4. Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης Δ_μ στο τυχόν σημείο $M_0(x_0, y_0)$ της C_μ

Να δείχτε ότι όλες αυτές, σε σημεία με σταθερά ετεμνημένη x_0 , έχουν ένα κοινό σημείο T.

5. Μελετήστε το πρόσημο της $f_1(x) - f_0(x)$

6. Χαράξτε τις Γ , C_0 , C_1 .

B. I. Να δείχτε ότι: $f^{(v)}(x) = (-1)^v f_{\mu-v}(x) \quad \forall v \in \mathbb{N}^*$

2. Αν λερ θέτουμε $u_0 = f_{\mu}(\lambda)$. Να δείχτε αν είναι επίσης $u_v = f_{\mu}^{(v)}(\lambda)$ ότι $\forall v \in \mathbb{N}^*$

$$u_{v-1} + u_v = (-1)^{v-1} e^{\lambda}$$

αν $v \in \mathbb{N}^*$ να υπολογιστεί συναρτήσσει του λ το άθροισμα

$S_{2p-1} = u_0 + u_1 + \dots + u_{2p-1}$ Να εξαχέτε στη συνέχεια

το άθροισμα S_{2p} και να δείζετε ότι $S_{2p} = f_{\mu-p}(\lambda)$.

3. Ομοίως $F_{2p} = (p+1)S_{2p}$ αν $F_{2p} = u_0 + u_1 + \dots + u_{2p}$.

ΛΥΣΗ

A. 1. π.ο = R $\lim_{-\infty} f_{\mu}(x) = (-\infty)(\infty) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f_{\mu}(x) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{e^x} = 0 \quad f'_{\mu}(x) = e^x(1-x-\mu) \text{ μηδενίζεται}$

για $x=1-\mu$ και αλλάζει πρόσημο. Άρα

x	$-\infty$	$1-\mu$	$+\infty$
$f_{\mu}(x)$	$-\infty$	$e^{\mu-1}$	0

2. Προκύπτει απ το 1.

3. $f_{\mu}(x)=0 \Rightarrow x_1 = -\mu \quad f'_{\mu}(x)=0 \Rightarrow (1-x-\mu)e^x = 0$

ή $x_2 = 1-\mu \quad f''_{\mu}(x)=0 \Rightarrow (x+\mu-2)e^x = 0 \Rightarrow x_3 = 2-\mu$. Παράγωγοι είναι: $2x_2 = x_1 + x_3$.

Στο H_{μ} , μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος άρα $x_{\mu} = 1-\mu$. Τότε $y_{\mu} = f_{\mu}(x_{\mu}) = e^{\mu-1}$. Δηλ. $H_{\mu}(1-\mu, e^{\mu-1})$.
Με απολοισή του μ , έχω την αναλυτική εξίσωση των H_{μ} : $y = e^x$.

4. Η εξίσωση εφαπτομένης στο (x_0, y_0) είναι:

(1) $y - (x_0 + \mu) e^{-x_0} = (1 - x_0 - \mu) e^{-x_0} (x - x_0)$. Θα προσδιορίσω το ζεύγος (x, y) , που πληρεί την (1) $\forall \mu \in \mathbb{R}$ και σταθερό x_0 .
 Η (1) γράφεται: $y - x_0 e^{-x_0} - (1 - x_0)(x - x_0) e^{-x_0} = \mu [e^{-x_0} - e^{-x_0}(x - x_0)]$.
 Για να ισχύει για κάθε $\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x_0 + 1, y = e^{-x_0}$. Άρα $T_0(x_0 + 1, e^{-x_0})$.

5. $f_1 - f_0 = (x+1)e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

6. $C_0: y = xe^{-x} \quad C_1: y = (x+1)e^{-x} \quad (\Gamma): y = e^{-x}$

Τα αποτελέσματα του 5. φαίνονται γραφικά, αφού κάθε γνήσιο της C_1 , βρίσκεται "πάνω", απ' το αντίστοιχο γνήσιο της C_0 , (με την ίδια τετμημένη). Η γραφική παράσταση, στο τέλος της άσκησης.

B. 1. α. Εξετάσω για $n=1$: $f'_\mu = (1 - x - \mu)e^{-x} = -(x + \mu - 1)e^{-x} = (-1)^1 f_{\mu-1}(x)$

β. Έστω ότι $f^{(n)}_\mu(x) = (-1)^n f_{\mu-n}(x)$

γ. Τότε $f^{(n+1)}_\mu(x) = (f^{(n)}_\mu)' = [(-1)^n f_{\mu-n}]' = (-1)^n f'_{\mu-n} =$

$= (-1)^n [(x + \mu - n)e^{-x}]' = (-1)^n [e^{-x} - (x + \mu - n)e^{-x}] = (-1)^n [-1 - x + \mu + n]e^{-x} =$

$= (-1)^{n+1} [x + \mu - n + 1]e^{-x} = (-1)^{n+1} f_{\mu-n-1}(x) \quad \text{ο.ε.δ.}$

2. Είναι $u_v = f^{(v)}_\mu(1) = (-1)^v f_{\mu-v}(1) = (-1)^v (\lambda + \mu - v)e^{-1}$.
 $u_{v-1} + u_v = f^{(v-1)}_\mu(1) + f^{(v)}_\mu(1) =$

$= (-1)^{v-1} f_{\mu-v-1}(1) + (-1)^v f_{\mu-v}(1) = (-1)^{v-1} (\lambda + \mu - v + 1)e^{-1} + (-1)^v (\lambda + \mu - v)e^{-1} =$

$= (-1)^{v-1} e^{-1}$

$$u_0 + u_1 = e^{-\lambda}$$

$$u_1 + u_2 = (-1)^1 e^{-\lambda}$$

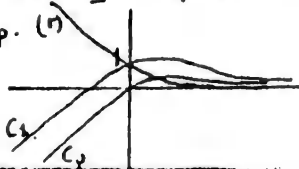
$$\dots \dots \dots u_{2p-2} + u_{2p-1} = (-1)^{2p-2} e^{-\lambda} \quad \text{Ηε πρόθεσις έχω}$$

$$\sum_{i=0}^{2p-1} u_i = e^{-\lambda} (1 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{p \text{ φορές}}) = p e^{-\lambda}$$

$$S_{2p} = S_{2p-1} + u_{2p} = p e^{-\lambda} + f_{p-2p}(\lambda) = p e^{-\lambda} + (\lambda + \mu - 2p) e^{-\lambda} =$$

$$= (\lambda + \mu - p) e^{-\lambda} = f_{\mu-p}(\lambda)$$

$$\begin{aligned} 3. \quad F_{2p} &= u_0 + u_2 + \dots + u_{2p} = \\ &= f_p(\lambda) + (-1)^2 f_{p-2}(\lambda) + \dots + (-1)^{2p} f_{p-2p}(\lambda) = \\ &= e^{-\lambda} (\lambda + \mu + \lambda + \mu - 2 + \lambda + \mu - 4 + \dots + \lambda + \mu - 2p) = \\ &= e^{-\lambda} [(p+1)(\lambda + \mu) - (2 + 4 + 6 + \dots + 2p)] = \\ &= e^{-\lambda} [(p+1)(\lambda + \mu) - p(p+1)] = e^{-\lambda} (p+1)(\lambda + \mu - p) = \\ &= (p+1) f_{\mu-p}(\lambda) = (p+1) S_{2p}. \quad (\eta) \end{aligned}$$



78. θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_v(x) = \begin{cases} v x + |x| \ln x^2 & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Παριστάνουμε με C_v την αντίστοιχη καμπύλη της $f_v(x)$ με C_v^+ το τμήμα της C_v με θετικές τετμημένες και με C_v^- το τμήμα της με αρνητικές τετμημένες.

I. Να δοθούν οι εκφράσεις της $f_v(x)$ για θετικά και αρνητικά x . Να δείχτεί ότι η $f_v(x)$ είναι συνεχής στο 0. Είναι και παραγωγίσιμη στο 0;

II. Να μελετηθούν οι μεταβολές της.

3. Εστω Λ_v το σημείο της C_v , στο οποίο η εφαπτομένη στη C_v^+ είναι // με τον Ox . Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Λ_v . Να δείχτε ότι τα Λ_v όταν το v διατρέχει το \mathbb{R} , ανήκουν σε σταθερή ευθεία D , την οποία να προσδιορίσετε.

4. Εστω B_v το σημείο τομής (εκτός του O), της C_v^+ με τον Ox . Να δείξετε ότι, η εφαπτομένη της C_v στο B_v , έχει διεύθυνση ανεξάρτητη του v .

5. Εστω για $\forall x \in \mathbb{R}^+$ η $g(x) = f_0(x)$. Να δείχτε ότι $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_v(x e^{-v/2}) = e^{-v/2} g(x)$.

6. Να χαρακτηρίσει η C_2 .

(EACC. SERIE E. 1983)

ΛΥΣΗ

$$1. \quad f_v(x) = \begin{cases} vx + x \ln x^2 & \text{για } x > 0 \\ 0 & \text{" } v = 0 \\ vx - x \ln x^2 & \text{" } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Είναι} \quad \lim_{0^+} f_v(x) = \lim_{0^+} (vx \pm x \ln x^2) = 0 \pm (-\infty) = \lim_{0^+} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{0^+} \frac{2x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{0^+} (-2x) = 0 = f_v(0) \quad \text{άρα συνεχής στο } 0.$$

$$\text{Επίσης είναι} \quad \lim_{0^-} \frac{f_v(x) - 0}{x - 0} = \lim_{0^-} (v \pm \ln x^2) = \mp \infty \quad \text{άρα}$$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

$$2. \quad \lim_{+\infty} f_v(x) = \infty, \quad \lim_{-\infty} f_v(x) = +\infty$$

$$\text{Για } x > 0, \quad f'_v(x) = v + \ln x^2 + 2 \quad \text{άρα στο } (0, e^{-\frac{v+2}{2}}) \searrow$$

$$\text{και στο } (e^{-\frac{v+2}{2}}, \infty) \nearrow$$

$$\text{Για } x < 0, \quad f'_v(x) = v - \ln x^2 - 2 > 0 \Rightarrow 2 \ln |x| < v + 2 \Rightarrow$$

την G . χ , επειδή έχουν κοινό πεδίο ορισμού (το R) προκύπτει, ότι οι δύο σχέσεις, έχουν το ίδιο χρώμα. Επομένως η εικόνα της G , μέσω του T , είναι η ίδια με C .

3. Απόδειξη για το φραγμένο:

Θα δείχτει επαγωγικά:

Ισχύει $|a_n| < \frac{1}{e}$. Έστω $|a_n| < \frac{1}{e}$. Τότε:

$$|a_{n+1}| = |-a_n \ln |a_n|| = |a_n| |\ln |a_n|| < |a_n| |a_n| = |a_n|^2 < \frac{1}{e^2} < \frac{1}{e}$$

(Ισχύει γι' $x > 0$ $\ln x < x$) Άρα η a_n φραγμένη.

Για τη μονοτονία θεωρώ τη διαφορά:

$$a_{n+1} - a_n = -a_n \ln |a_n| - a_n = -a_n (\ln |a_n| + 1) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(αφού $|a_n| < \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln |a_n| < -1 \Leftrightarrow \ln |a_n| + 1 < 0$ και η a_n είναι θετικών όρων). Άρα είναι γι' αύξουσα.

Επομένως είναι συγκλίνουσα. Έστω l το όριο.

$$\text{Τότε} \quad l = -l \ln l \Leftrightarrow \ln l = -1 \Leftrightarrow l = 1/e$$

(διαδιαβία γνωστή με το όβλιο του Ορθογώνιου).

86. Έστω $F_v(x) = x(\ln \frac{1}{x})^v$ $x \in (0,1]$ και $F_v(0) = 0$ ορισμένη στο $[0,1]$

1. α. Να μελετηθεί η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα της F_v στο 0,

β. Να δείχτει ότι η F_v παίρνει μέγιστη τιμή για $x = \alpha_v = e^{-v}$. Θέτουμε $\beta_v = F_v(\alpha_v)$. Να υπολογιστεί το β_v συναρτήσει του v .

γ. Να δοθεί ο πίνακας μεταβολών της F_v .

2. α. Να μελετηθεί η (α_v) ως προς τη σύγκλιση.

β. Να δείχτεί η ανισότητα: $\forall x \in [0, \bar{e}] \quad F_v(x) \geq \frac{\beta_v}{\alpha_v} x$.

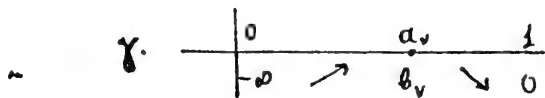
(BACC/ C PARIS 1984)

ΛΥΣΗ

1. α. Το αμφιβωτούμενο εγχείδιο συνέχειας είναι το 0.
 Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_v(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\ln \frac{1}{x} \right)^v = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\ln \frac{1}{x} \right)^v}{\left(\frac{1}{x} \right)'} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} -v \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{v-1} = -\infty$. Άρα δεν είναι συνεχές στο 0.

Εξετάσουμε τη παράγωγο στο $x_0 = 0$
 $F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \left(\ln \frac{1}{x} \right)^v}{x} = \infty$. Δεν υπάρχει παράγωγος στο 0.

β. Είναι $F'_v(x) = \left(\ln \frac{1}{x} \right)^v - v \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{v-1} = 0 \Leftrightarrow$
 $\ln \frac{1}{x} = v \Leftrightarrow x = \bar{e}^v$. Είναι η τεταγμένη του μεγίστου.
 Η τεταγμένη είναι το $\beta_v = F_v(\alpha_v) = \bar{e}^v \left(\ln \bar{e}^v \right)^v = \bar{e}^v \cdot v^v$.



2. α. Για τον αναγνώστη (μηδενική ακολουθία).

β. Αφού $x \leq \bar{e}^v \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \bar{e}^v \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x} \geq v \Leftrightarrow$
 $\left(\ln \frac{1}{x} \right)^v \geq v^v \Leftrightarrow$ επειδή $x > 0 \quad x \left(\ln \frac{1}{x} \right)^v \geq x \cdot v^v \Leftrightarrow$
 $F_v(x) \geq x \frac{\beta_v}{\alpha_v}$ (απ το 1 β).

87. Να λυθούν στο \mathbb{R} οι εξισώσεις:

1. $\log(x+3) + \log(x+2) = \log(x+11)$

2. $\log(x^2+5x+6) = \log(x+11)$

3. $\log(-x-2) = \log \frac{-x-11}{x+3}$

4. $\log(x+2) = \log(-x-11) - \log(x+3)$

(BACC. D'OURTE MER)

ΛΥΣΗ

1. Ορίζεται στο $(-2, \infty)$. Σ' αυτό το διάστημα γίνεται $(x+3)(x+2) = x+11 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$ με $x=1$ @ $x=-5$. Άρα η μοναδική λύση της είναι η $x'=1$.

2. Το τριώνυμο x^2+5x+6 έχει ρίζες τα $-2, -3$. Άρα η εξίσωση ορίζεται στο $(-11, -3) \cup (-2, \infty)$. Τώρα λοιπόν έχουμε ρίζες τις $x'=1$ και $x''=-5$.

3. Λυτή ορίζεται για τις τιμές του x για τις οποίες το $x+2 < 0$ και $(x+3)(x+11) < 0$ δηλ. στο $(-11, -3)$. Σ' αυτό το διάστημα γράφεται:
 $(x+2)(x+3) = x+11$ άρα δέχεται μόνο την $x''=-5$

4. Δεν έχει πεδίο ορισμού. Άρα δεν έχει λύση.

88. 1. Να μελετηθεί το πρόσημο του $x+1$.

2. Να λυθεί στο \mathbb{R} η εξίσωση $\frac{1}{\log(x+1)} = 4$

3. Ομοίως η $\log|x+1| = 0$

4. Ομοίως η $\log|x+1| = \log 2$.

(BACC/ MONTPELLIER)

ΛΥΣΗ.

1. Το $x+1 > 0$ για $x > -1$ και το $x+1 < 0$ για $x < -1$
2. $\log(x+1) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x+1 = e^{1/4} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{e} - 1$
3. $\log|x+1| \geq 0 \Leftrightarrow |x+1| \geq 1 \Leftrightarrow x+1 \leq -1$ και $x+1 \geq 1$
 δηλ. το σύνολο των λύσεων είναι το $E = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.
4. $\log|x+1| = \log 2 \Leftrightarrow |x+1| = 2 \Leftrightarrow x+1 = \pm 2 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = 1$.

89. Εστω η συνάρτηση $F_\tau(x) = \begin{cases} x \frac{\eta(x)}{\tau \eta(\tau)} (x-\tau) & \text{για } x \neq 0, \tau \\ \eta(x-\tau) & \text{για } x=0, \tau \end{cases}$

Συμβολίζουμε με C_τ η αντίστοιχη καμπύλη της F_τ

1. α. Να δειχτείτε $\tau \in \mathbb{R}$, $\chi \in \mathbb{R}$:

$F_{-\tau}(x) = -F_\tau(-x)$. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για τις $C_\tau, C_{-\tau}$.

β. Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $\tau > 0$

Να δειχτείτε ότι η καμπύλη C_τ είναι συμμετρική ως προς άξονα συμμετρίας την εξίσωση $x = \tau/2$

2. Εστω το διάστημα $I_\tau = [\tau/2, +\infty)$

α. Να δειχτείτε ότι $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta \eta'(1+\eta)}{\eta} = a$

β. Να δειχτείτε ότι η F_τ είναι συνεχής στο διάστημα I_τ .

γ. Μονοτονία της F_τ στο I_τ (απ'τη παράγωγο).

3. α. Να δειχτείτε ότι αν $\tau > 2$, η F_τ δεν μηδενίζεται.,

β. Σε πόσα σημεία μηδενίζεται η F_2 ;

γ. Να δειχτεί ότι αν $\tau \in (0, 2)$ η F_τ μηδενίζεται σε δύο σημεία, των οποίων ονομάζουμε τις τετμημένες $\alpha(\tau)$ και $\beta(\tau)$ ($\alpha < \beta$).

Να δειχτεί ότι $\alpha(\tau) + \beta(\tau) = \tau$.

(BACC. E. 1983)

ΛΥΣΗ

1.α.

$$H \quad F_{-\tau}(x) = \begin{cases} x \ln|x| - (x+\tau) \ln|x+\tau| & x \neq 0, -\tau \\ -\tau \ln \tau & x = 0, -\tau \end{cases}$$

$$H \quad -F_\tau(-x) = \begin{cases} x \ln|x| - (x+\tau) \ln|x+\tau| & x \neq 0, -\tau \\ -\tau \ln \tau & x = 0, -\tau \end{cases}$$

Οι δύο συναρτήσεις είναι πράγματι ίδες, άρα οι F_τ και $F_{-\tau}$ έχουν γραφή με ζεύγη, της μορφής: (α, β) , $(-\alpha, -\beta)$ αντιστοίχα, δηλ. οι C_τ και $C_{-\tau}$ είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.

β. Οι τετμημένες δύο τυχόντων σημείων, συμμετρικών της ευθείας $x = \frac{\tau}{2}$ είναι: $x + \frac{\tau}{2}$, $-x + \frac{\tau}{2}$. Άρα πρέπει να δείξω ότι, για $\tau > 0$

$$f\left(x + \frac{\tau}{2}\right) = f\left(-x + \frac{\tau}{2}\right). \quad \text{Πράγματι:}$$

$$F_\tau\left(x + \frac{\tau}{2}\right) = \begin{cases} \left(x + \frac{\tau}{2}\right) \ln\left|x + \frac{\tau}{2}\right| - \left(x - \frac{\tau}{2}\right) \ln\left|x - \frac{\tau}{2}\right| & \text{για } x \neq 0, \frac{\tau}{2} \\ \frac{\tau}{2} \ln \frac{\tau}{2} & \text{για } x = 0, \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

$$\text{και } F_\tau\left(-x + \frac{\tau}{2}\right) = \begin{cases} \left(-x + \frac{\tau}{2}\right) \ln\left|-x + \frac{\tau}{2}\right| - \left(x - \frac{\tau}{2}\right) \ln\left|x - \frac{\tau}{2}\right| \\ \frac{\tau}{2} \ln \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Άλλα οι δύο τύποι των συναρτήσεων, γυμνώνται.
Το υπερβάλλον, του 1β. Θα παίξει ρόλο
στα επόμενα. // μελέτη στη συνέχεια θα γίνει
για λόγους απλούστευσης στο $[\frac{\pi}{2}, \infty)$ (πρώτος κλάδος).

2.

$$\alpha. \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha n)}{n} = \frac{0}{0} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n}{1+\alpha n} = \alpha.$$

β. Το γυμνίο όπου θα γίνει εξέταση για τη συνέ-
χεια, είναι το $x_0 = \tau$. Σ' όλα τα άλλα γυμνία του
 $[\frac{\pi}{2}, \infty)$ η συνάρτηση είναι συνεχής.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \tau^+} F_{\tau}(x) &= \lim_{x \rightarrow \tau} [x \ln|x| - 0(-\infty)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \tau} \left[x \ln|x| - \frac{\ln|x-\tau|}{\frac{1}{(x-\tau)}} \right] = \lim_{x \rightarrow \tau} [x \ln|x| + |x-\tau|] = \tau \ln \tau = \\ &= F_{\tau}(\tau) \text{ όρα } \gamma \end{aligned}$$

$F_{\tau}(x)$ συνεχής στο $x_0 = \tau$.

$$\gamma. \text{ Είναι } F'_{\tau}(x) = \begin{cases} \ln|x| - \ln|x-\tau| & x \in I_{\tau} - \{\tau\} \\ 0 & x = \tau \end{cases}$$

Εξετάζω το πρόσημο της:

Η $\ln|x| - \ln|x-\tau| = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$. Στο $x = \frac{\pi}{2}$
έχουμε ακρότατο. Η ανίσωση $\ln|x| - \ln|x-\tau| > 0$,
έχει μοναδική λύση την $x > \frac{\pi}{2}$ (αφού $x > 0$)
Άρα η $F_{\tau}(x)$ είναι σίγουρα (π.λ στο I_{τ} ,
με γυμνίο ελαχίστου το $(\frac{\pi}{2}, F_{\tau}(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\pi}{2}, \tau \ln \frac{\pi}{2})$)
Τελικά η C_1 θα είναι καμπύλη συμπεριτριμμένη ως προς
την $x = \frac{\pi}{2}$, με ελάχιστο πάνω & κάτω τον αξονα
συμμετρίας.

3. α. Για να μηδενίζεται η F_{τ} , πρέπει

η C_τ , να τέρνει του άξονα Ox' , δηλ. το ελδ-
χιστο αυτίς, να έχει τεταγμένη ≤ 0 . Δηλ. η
 F_τ , μηδενίζεται, όταν $\tau \ln \frac{x}{2} \leq 0$, κι επειδή $\tau > 0$,
πρέπει $\ln \frac{x}{2} \leq 0$ άρα $\ln \frac{x}{2} \leq \ln 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow$
 $x \leq 2$. Επομένως για $x > 2$, η $F_\tau(x)$ δι. μηδενίζεται.

β. Όταν $\tau = 2$, τότε $\tau \ln \frac{x}{2} = 0$ δηλ. η C_τ
εφάπτεται στον Ox' , δηλ. η $F_\tau(x)$ μηδενίζεται.

γ. Όταν $t \in (0, 2) \Leftrightarrow \ln \frac{x}{2} < 0$, άρα η C_τ
τέρνει τον Ox' , σε δύο γνημία, έστω τα
 $\alpha(\tau)$ και $\beta(\tau)$. Όπως αυτά θα είναι, σύμμετρα
του γνημίου μ ι τεταγμένη $x = \frac{x}{2}$ (1. β). Άρα θα
ίσχύει $\frac{\alpha(\tau) + \beta(\tau)}{2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \alpha(\tau) + \beta(\tau) = x$.

90. Θεωρούμε την οικογένεια συναρτήσεων

$$F_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x) \quad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

Α. 1. Να δοθεί το πεδίο ορισμού των F_λ (δια-
κρίνετε τις περιπτώσεις $\lambda > 0$, $\lambda < 0$)

2. α. Υπάρχει τομή στις καμπύλες C_λ και $C_{-\lambda}$;

3. Θέτω $\Phi_\lambda = F_\lambda(x) - x$

α. Υποθέτω ότι $\lambda < 0$. Να μελετηθούν οι μετα-
βολές της Φ_λ . Να εξαχθεί το πλήθος των σημείων
τομής της C_λ και της $D: y = x$.

β. Εστω $\lambda > 0$. Να μελετηθούν πάλι οι μεταβολές
της Φ_λ . Να διαπιστώστε ότι η μεγαλύτερη τιμή της
 $\Phi_\lambda(x)$, όταν το x διαγράφει το πεδίο ορισμού, είναι
το $\mu(\lambda) = 1/\lambda + \ln \lambda$

γ. Μελετήστε, όταν $\lambda \in (0, \infty)$ τις μεταβολές
και το πρόσημο του $\mu(\lambda)$

δ. Πόσα είναι τα κοινά σημεία των C_λ και D , όταν $\lambda > 0$;

β. Ελετούμε την περίπτωση όπου $\lambda = 1$

Ι α. Παραστήστε γραφικά την C_1 και την D .

β. Ονομάζουμε P και Q τα σημεία τομής τους. Είναι $P(p)$ και $Q(q)$ με $p < 0$. Να δειχτεί ότι $2 < q < 3$

2. Έστω η (a_n) με $a_0 = 2$, $a_{n+1} = F(a_n)$

α. Να παρασταθούν στο επίπεδο, με τη βοήθεια της C_1 οι όροι a_0, a_1, a_2

β. Να δειχτεί ότι η (a_n) είναι αύξουσα και φραγμένη άνω, απ' το q .

(SERIE C. BESANCON 1985)

ΛΥΣΗ

A. 1. $\lambda > 0$. Πρέπει $1 + \lambda x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow D_\lambda = (-\frac{1}{\lambda}, \infty)$
Ομοίως για $\lambda < 0 \Leftrightarrow D_\lambda = (-\infty, -\frac{1}{\lambda})$.

2. Οι δύο καμπύλες συνδέονται (κοινό σημείο) στο $x_0 = 0$. Τότε $F_\lambda(0) = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

3. α. ΠΡΟΣΟΧΗ: Ουδισωτικά θα διερευνήσουμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1 + \ln(1 + \lambda x) = x$ για τα διάφορα λ .

Για $\lambda < 0$ $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{\lambda}} \Phi_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{\lambda}} [1 + \ln(1 + \lambda x) - x] = -\infty + \frac{1}{\lambda} = -\infty$
και $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_\lambda(x) = +\infty$. Επίσης $\Phi'_\lambda(x) = \frac{\lambda}{1 + \lambda x} - 1 < 0$ (αφού

ο παρονομαστής θετικός, και ο αριθμητής αρνητικός). Άρα

η $\Phi_\lambda(x)$ είναι γν. φθίνουσα για $\lambda < 0$. Τελικά:
και επειδή η $\Phi_\lambda(x)$ συνεχής, άρα κάπου μηδενίζεται δηλ. η (1) έχει μία λύση για $\lambda < 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\lambda}$
$\Phi_\lambda(x)$	$+\infty$	$-\infty$

β. Ομοίως για $\lambda > 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \ln(1+x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \cdot x =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{1+\lambda x} - 1 \right] = +\infty \quad \text{Και τελικώς εδώ επιφύλαξη} \quad \Phi'_1(x) = \frac{1}{1+\lambda x} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$x = 1 - \frac{1}{\lambda}$, και $\Phi_1(x)_{\text{max}} = \frac{1}{\lambda} + \ln \frac{1}{\lambda}$, ο πίνακας μεταβολών είναι

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\frac{1}{\lambda} & 1 - \frac{1}{\lambda} & +\infty \\ \Phi_1(x) & -\infty & \nearrow \frac{1}{\lambda} + \ln \frac{1}{\lambda} & \searrow -\infty \end{array}$$

Το πλάτος των ριζών της $\Phi_2(x) > 0$, εξαρτάται, απ' το πλάτος των θηλειών, στα οποία, η C_2 τέμνει τον Ox , κι αυτό παύει, απ' τη θέση του μεγίστου της. Άρα θα διερευνήσω τη θέση, αυτού του μεγίστου για τα διάφορα λ . Προκύπτει ο εξής πίνακας:

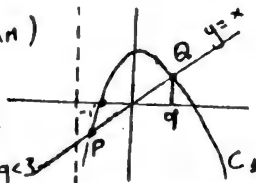
λ	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{\lambda} + \ln \frac{1}{\lambda}$	$+\infty$	$\nearrow 1$	$\nearrow +\infty$

δηλ. το μέγιστο, είναι πάντα θετικό, άρα δύο θηλίες κομψές, άρα η (1) δύο ρίζες για $\lambda > 0$.

β. Ι.α. Απλώς ($x = -1$ ασύμπτωτη, κλπ)

$$\begin{cases} \text{β. Είναι } \Phi_1(2) = \ln 3 - 1 > 0 \\ \Phi_1(3) = \ln 4 - 2 < 0 \end{cases} \text{ Άρα } 2 < q < 3$$

$$\text{Έχου } \Phi_1(q) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(1+q) = q(q) \text{ για } 2 < q < 3$$



2.α.0. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ είναι στον άξονα των Ox , δεξιά του $\alpha_0=2$ και αριστερά του q αφού

$$2 < \alpha_1 = 1 + \ln(1+2) < 1 + \ln(1+q) = q \text{ απ' τη (2)}$$

β. Οι αποδείξεις επαγωγικά:

Λύζουσα:

$$\alpha_1 > \alpha_0$$

$$\text{Έσω } \alpha_n > \alpha_{n-1} \Leftrightarrow 1 + \alpha_n > 1 + \alpha_{n-1} \Leftrightarrow 1 + \ln(1 + \alpha_n) > 1 + \ln(1 + \alpha_{n-1}) \\ \Leftrightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n \text{ ο.κ.}$$

$$\text{Φράξημένη: } \alpha_0 = 2 < q \text{ Έσω } \alpha_n < q \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{n+1} = 1 + \ln(1 + \alpha_n) < 1 + \ln(1 + q) = q \text{ απ' τη (2).}$$

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ.

91. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{και} \quad G(x) = \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

Α. 1. Να δείχτε ότι η F είναι περιττή. Να μελετηθούν οι μεταβολές της. Να χαραχτεί η καμπύλη της.

2. Εστω $a \in \mathbb{R}$ και $a \geq 0$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν $A(a)$ του μέρους του επιπέδου που ορίζεται απ' τις:

$$F(x) \leq \phi \leq 1 \quad \left. \vphantom{F(x)} \right\} \text{ (μπορεί να χρησιμοποιηθεί ότι } 1 = (1 + e^x) - e^x \text{)}. \text{ Να μελετηθεί το όριο αυτού του εμβαδού, όταν το } a \rightarrow +\infty$$

Β. 1. Εστω η νέα συνάρτηση $H(x) = F(x) - x/2$. Μελετήστε τις μεταβολές της και το πρόσημό της, για τις διάφορες τιμές του x .

2. Θεωρούμε την αναδρομική ακολουθία (σ_n) με $\sigma_0 = 1$ και $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma_{n+1} = F(\sigma_n)$.

Να δείχτε ότι $\forall n \quad 0 \leq \sigma_{n+1} \leq \sigma_n/2$. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας.

Γ. 1. Η συνάρτηση G είναι άρτια ή περιττή; Μελετήστε τις μεταβολές της και χαράξτε την καμπύλη.

2. Εστω $\beta \in \mathbb{R}$ και $\beta > 2$. Να υπολογιστεί (με ολοκλήρωση κατά μέρη) η ελάχιστη τιμή $B(\beta)$ της G στο $[2, \beta]$ που ορίζεται:

$$B(\beta) = -\frac{1}{\beta-2} \int_2^\beta G(x) dx. \text{ Να δείξετε ότι το } B(\beta) \text{ τείνει στο } 0 \text{ όταν το } \beta \rightarrow \infty$$

Δ. 1. Να δείχτε ότι ο περιορισμός της G στο $(-1, 1)$ είναι 1-1 του $(-1, 1)$ στο \mathbb{R} . Να βρεθεί η αντίστροφη σχέση.

2. Αν $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ να λυθεί η εξίσωση:

$$G(x) = G(x_0)$$

85. Δίνεται η συνάρτηση F που ορίζεται:

$$\left. \begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) &= -x \ln x \\ F(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

1. α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της και να χαραχτεί η καμπύλη της (Γ) .

β. Να μελετηθεί, για τα διάφορα x , η σχετική θέση της καμπύλης (Γ) και της ευθείας $(D): \psi = x$.

2. Έστω G η συνάρτηση:

$$\left. \begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad G(x) &= -x \ln |x| \\ G(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

α. Κάνοντας χρήση τα προηγούμενα αποτελέσματα, να χαραχτεί την καμπύλη της G .

β. Έστω T , ο μετασχηματισμός που σε κάθε σημείο $M(x, \psi)$ αντιστοιχεί το σημείο $M_1(x_1, \psi_1)$

$$\text{με } x_1 = ex$$

$$\psi_1 = -ex + e\psi \quad \text{Ποιά είναι η εικόνα της } C, \text{ μέσω του } T;$$

3. Ορίζουμε την ακολουθία (a_n) ως εξής:

$$a_0 \in (0, 1/e)$$

$$a_{n+1} = G(a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (G, \text{ η προηγούμενη συνάρτηση})$$

Να δείξετε ότι η (a_n) είναι φραγμένη, και γνησίως αύξουσα. Είναι συγκλίνουσα; Να βρεθεί το όριό της.

(BACC. C PARIS 1984)

ΛΥΣΗ

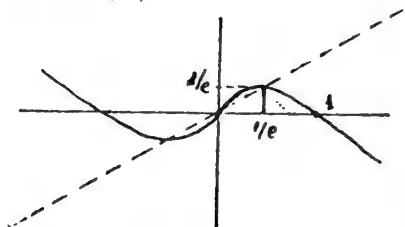
$$1. \alpha. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{1/x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$$

$$F'(x) = -\ln x - x \frac{1}{x} = -1 - \ln x \quad \text{Άρα για } x < \frac{1}{e} \text{ η } F \text{ είναι}$$

γινώσκω αύθουσα. $F\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{e}$. Ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	0	$\frac{1}{e}$	1	∞
$F(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$	$\rightarrow -\infty$

Η γραφική παράσταση της F είναι (μόνο το τρίτο με δεξιές τεταγμένες).



• 6. Συγκρίνω τις τεταγμένες των σημείων της ευθείας και της κορυφής (Γ): Έστω $x > -\ln x \Leftrightarrow$

$-\ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$. Άρα για $x > \frac{1}{e}$, η ευθεία D , βρίσκεται "πάνω" από την κορυφή (Γ), όπως φαίνεται και στο σχήμα.

2. α. Η $G(x)$ τυτφίζεται με την $F(x)$ στο $[0, \infty)$. Είναι γέ $G(x) = x \ln|-x| = x \ln|x| = -G(x)$. Δηλ. είναι περπτ. τή σνάρτηση. Άρα η κορυφή της είναι συμμετρική ως πρὸς νέντρο. Τελικά είναι ολόκληρη η κορυφή του σχήματος.

β. Θα βρω τη σχέση των νέων συντεταγμένων μεταξί τους: Αν τις δοδίδες έχω: $x = \frac{x_1}{e}$, $y = \frac{x_1+y_1}{e}$

Άρα η $y = -x \ln|x|$ γίνεται:

$$\frac{x_1+y_1}{e} = -\frac{x_1}{e} \ln \left| \frac{x_1}{e} \right| \Leftrightarrow y_1 = -x_1 \ln \left| \frac{x_1}{e} \right| - x_1 \Leftrightarrow$$

$$y_1 = -x_1 \left(\ln \frac{|x_1|}{e} + 1 \right) \Leftrightarrow y_1 = -x_1 (\ln|x_1| - \ln e + 1) \Leftrightarrow$$

$$y_1 = -x_1 \ln|x_1|. \text{ Δηλ. τα } x_1, y_1 \text{ πληρούν των}$$

$|x| < e^{\frac{v+1}{2}}$ άρα στο $(-\infty, -e^{\frac{v+1}{2}})$ ↓ και στο $(-e^{\frac{v+1}{2}}, 0)$ ↑

Σηλ.

x	$-\infty$	$-e^{\frac{v+1}{2}}$	0	$e^{\frac{v+1}{2}}$	$+\infty$
$f(x)$	∞	\nearrow	0	\nearrow	\nearrow

3. $f'(x_0) = 0 \quad x_0 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x_0 = e^{-\frac{v+1}{2}}$ άρα $A_v(e^{-\frac{v+1}{2}}, -2e^{-\frac{v+1}{2}})$
 άρα η $D: y = -2x$ σταθερή.

4. $vx + x \ln x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $\ln x^2 = -v \Rightarrow x = e^{-\frac{v}{2}}$.
 Άρα $f'(e^{-\frac{v}{2}}) = v + \ln e^{-v} + 2 = 2$ ο.ε.δ.

$$\begin{aligned} 5. f_1(x^{-\frac{v}{2}}) &= vx e^{-\frac{v}{2}} + x e^{-\frac{v}{2}} \ln (x e^{-\frac{v}{2}})^2 = vx e^{-\frac{v}{2}} + x e^{-\frac{v}{2}} \ln (x^2 e^{-v}) \\ &= vx e^{-\frac{v}{2}} + x e^{-\frac{v}{2}} [2 \ln x - v] = x e^{-\frac{v}{2}} \ln x^2 = e^{-\frac{v}{2}} g(x) \end{aligned}$$

6. Για του αναγνώστη.

79. 1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της

$$f(x) = -\frac{\ln x}{x}$$

2. Εστω η $F(x) = 1/2 (\ln x)^2$. Να δείχτεί ότι
 αν $x \geq e$: $-\frac{\ln(x+1)}{x+1} \leq F(x+1) - F(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

Να εξαχθεί στη συνέχεια το όριο της ακολουθίας

(α_n) που ορίζεται: $\alpha_1 = \ln 1/1 \quad \alpha_2 = \ln 1/1 + \ln 2/2 \dots$

$\dots \alpha_n = \ln 1/1 + \ln 2/2 + \dots + \ln n/n$.

BACC/ E, 1983)

ΛΥΣΗ.

1. $f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \pi.ο (0, \infty) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad \text{δλ. για } x < e \nearrow \text{ και } x > e \searrow$$

$$f''(x) = \frac{2x \ln x - 3x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad \text{δλ. το } \sqrt{e} \text{ είναι σημείο}$$

γραφικά παρίσταται αλλιώς.

2. Είναι $F'(x) = f(x)$
για το διάστημα $[x, x+1]$ με $x \geq e$ (ενός $\nearrow f(x)$)

ισχύει:

$$\frac{f(x+1)}{x+1} \leq \int_x^{x+1} f(x) dx \leq \frac{f(x)}{x} \quad \text{αφού οι άκρες τιμές}$$

της συνεχούς και αύξουσας $f(x)$ στο $[x, x+1]$ είναι
οι $f(x)$, $f(x+1)$. Είναι όμως:

$$\int_x^{x+1} f(x) dx = F(x) \Big|_x^{x+1} = F(x+1) - F(x) \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Συν. βλέπουμε έχω:

$$F(2) - F(1) \leq \frac{f(1)}{1}$$

$$F(3) - F(2) \leq \frac{f(2)}{2}$$

$$\vdots$$

$$F(n+1) - F(n) \leq \frac{f(n)}{n}$$

$$+ \frac{F(n+1) - F(1)}{n} \leq S \quad \text{Αλλά}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(n+1) = \infty \quad \text{άρα } S \rightarrow \infty. \quad (\text{Διέταξη και όριο}).$$

80.Α. Έστω $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} \ln|x|$, με $D = \mathbb{R}^*$

1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της.
2. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δέχεται στο \mathbb{R} μια ρίζα α : $3 < \alpha < 4$.
3. Απ το προηγούμενο ερώτημα να υπολογίστε το πρόσημο της $f(x)$ στα διαστήματα: $(-\infty, 0)$, $(0, \alpha)$, (α, ∞) .

Β. Θα υπολογίσουμε τώρα τον αριθμό α , κατά προσέγγιση εκατοστού.

1. Έστω η $g(x) = 4 - \frac{1}{4} \ln|x|$ με $D = \mathbb{R}^*$

- α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της g .
Να δειχτεί ότι η εικόνα του $[3, 4]$ μέσω της περιέχεται στο ίδιο διάστημα $[3, 4]$
- β. Να δειχτεί ότι το α , είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x) = x$

Γ. Θεωρούμε την ακολουθία $u_0 = 3$ και

$$u_{n+1} = g(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

α. Να δειχτεί ότι $\forall n \in \mathbb{N}$

$$3 \leq u_n \leq 4$$

β. Να δειχτεί ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ οι αριθμοί $(u_n - \alpha)$ και $(u_{n+1} - \alpha)$ είναι ετερόσημοι.

$$\gamma. \forall x \in [3, 4] \Rightarrow |g'(x)| \leq 1/12$$

$$\delta. \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12} |u_{n+1} - u_n| \quad \text{απ όπου έχουμε}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - u_n| \leq 1/12^n$$

ε. Να εξαχθεί μια τιμή του α , κατά προσέγγιση εκατοστού.

ΛΥΣΗ

A. 1. $\lim_{0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$ (Οι απροσδιόριστες μορφές ως γνωστόν)
 Άρα η εικόνα (πινάκας μεταβολών) της $f(x)$
 εμφανίζεται ως εξής:

x	$-\infty$	0	a	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-\infty \parallel -\infty$	0	$+\infty$

2. Το πρόσημο της $f(x)$ διατηρείται αρνητικό, ε
 όσα $x < 0$ και έχουμε:

$$f(3) = -1 + \frac{\ln 3}{4} < 0 \text{ αφού } \ln 3 < 4 \Leftrightarrow (\ln 3 < \ln e^4)$$

Επίσης $f(4) = \frac{\ln 4}{4} > 0$, κι αφού η $f(x)$ είναι συνεχής

στο $[3, 4]$, άρα παίρνει κάθε τιμή μεταξύ των $f(3)$ & $f(4)$.

Αντ. $\exists a \in (3, 4) : f(a) = 0$

Η συνέχεια του προβλήματος προετοιμάζει την
 εύρεση μιας τιμής αυτού του a .

3. Τα πρόσημα της συνάρτησης στα δοθέντα
 διαστήματα είναι $-$, $-$, $+$ αντίστοιχα.

B. Οι μεταβολές της $g(x)$ δίνονται

x	$-\infty$	0	a	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty \parallel +\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Όταν $3 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \ln 3 \leq \frac{1}{4} \ln x \leq \frac{1}{4} \ln 4 \Leftrightarrow$

$4 - \frac{1}{4} \ln 4 \leq 4 - \frac{1}{4} \ln x \leq 4 - \frac{1}{4} \ln 3 < 4$ και επειδή

$3 < 4 - \frac{1}{4} \ln 4$ αφού $\frac{1}{4} \ln 4 < 1 \Leftrightarrow (\ln 4 < 4)$ έχω τελικά

$3 \leq g(x) \leq 4$.

β. Η $g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, η οποία από τα προηγούμενα, έχει μοναδική ρίζα το α .

Γ. α. Επαγωγικά $u_0 = 3$ ισχύει

έστω $3 \leq u_k \leq 4 \Leftrightarrow$ από το Β α. ότι $3 \leq g(u_k) \leq 4$

δηλ $3 \leq u_{k+1} \leq 4$ άρα ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

β. αν $u_n < \alpha$, επειδή $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ και

η $g(x)$ είναι γν. φθίνουσα στο $(0, \alpha)$ έχουμε $g(u_n) > g(\alpha) = \alpha$. Δηλ. οι $u_n - \alpha$, $u_{n+1} - \alpha$ έχουν ανυψωτικό πρόσημο. Δηλ. η u_n είναι ακολουθία, που πλησιάζει το α , με τρις εκατέρωθεν αυτού.

$$\gamma. |g'(x)| = \left| -\frac{1}{4x} \right| = \frac{1}{4x} \quad \text{Επειδή } 3 \leq x \leq 4$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{16} \leq \frac{1}{4x} \leq \frac{1}{12}$$

$$\text{τελειώ } |g'(x)| \leq \frac{1}{12}.$$

δ. Εφαρμόζω το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[u_n, u_{n+1}]$ υποδιάστημα του $[3, 4]$.

$$\left| \frac{g(u_{n+1}) - g(u_n)}{u_{n+1} - u_n} \right| = |g'(x)| \leq \frac{1}{12} \Rightarrow |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{12} |u_{n+1} - u_n|$$

Εφαρμόζω τη σχέση αυτή διαδοχικά:

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12} |u_n - u_{n-1}|$$

$$|u_n - u_{n-1}| \leq \frac{1}{12} |u_{n-1} - u_{n-2}|$$

$$\dots \dots \dots$$

$$|u_2 - u_1| \leq \frac{1}{12} |u_1 - u_0|$$

$$\text{Με πολ/μό: } |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{12^n} |u_1 - u_0| \leq \frac{1}{12^n}.$$

ε. Η υπολογισμός του α , έχει προετοιμαστεί, και αφίνεται στον αναγνώστη.

81. Εστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x^2$

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση και να παρασταθεί γραφικά σε ορθ. σύστημα. Εστω (Γ) η καμπύλη της.

2. Θεωρώ την συνάρτηση $f_a(x) = \ln(x^2 - ax + 4)$ όπου a παράμετρος και $-4 \leq a \leq 4$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f_a(x)$

β. Να βρεθούν τα όρια της $f_a(x)$ όταν $x \rightarrow \pm\infty$

γ. Να μελετηθούν οι μεταβολές της $f_a(x)$ για $-4 < a < 4$

δ. Εξέτω $g_a(x) = f_a(x) - \varphi(x)$. Να βρεθούν τα όριά της στο άπειρο. Να μελετηθεί το πρόσημο της $g_a(x)$.

3. α. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του 2. να κατασκευαστεί η καμπύλη C_2 της $f_a(x)$ για $a=2$, πάνω στο ίδιο σύστημα με την (Γ) . Να μελετηθούν οι σχετικές θέσεις των C_2 και Γ .

β. Μελετήστε τις μεταβολές της $f_a(x)$ για $a=4$ και $a=-4$. Κατασκευάστε την αντίστοιχη καμπύλη για $a=4$, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(BACC. D, LIMOGES)

ΛΥΣΗ

1. Η συνάρτηση ορίζεται στο \mathbb{R}^* και επειδή είναι άρτια, μελετώ τον περιορισμό της στο $(0, \infty)$, που είναι η $\phi(x) = 2 \ln x$. Οι μεταβολές της φαίνονται στο πίνακα

x	0	1	∞
$\phi(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$

(Γ) στο τέλος της λύσης.

2. α. Το πεδίο ορισμού της $f_a(x)$:

$$\Delta_a(x) = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 - ax + 4 > 0\}$$

Το τριώνυμο, έχει ορίζουσα την $\Delta = a^2 - 16 = (a-4)(a+4)$

Άρα αν $a = -4$ το $x^2 - ax + 4 = (x+2)^2$ και $\Delta_a = \mathbb{R} - \{-2\}$

αν $a = 4$ το $x^2 - ax + 4 = (x-2)^2$ και $\Delta_a = \mathbb{R} - \{2\}$

και αν $-4 < a < 4$ το $x^2 - ax + 4 > 0$ και $\Delta_a = \mathbb{R}$.

β. Επειδή $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - ax + 4) = \infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow \infty} f_x(x) = +\infty$

γ. Είναι $f'_x(x) = \frac{2x-a}{x^2-ax+4}$. Άρα είναι αρνητική για $x < \frac{a}{2}$

και θετική για $x > \frac{a}{2}$.

Οι μεταβολές της:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & a/2 & +\infty \\ \hline f'_x(x) & + & 0 & + \end{array}$$

δ. Η $g_x(x)$ ορίζεται στο \mathbb{R}^+ όπου $g_x(x) = \ln(x^2 - ax + 4) - \ln x^2 = \ln \frac{x^2 - ax + 4}{x^2} = \ln(1 - \frac{a}{x} + \frac{4}{x^2})$. Άρα $\lim_{x \rightarrow \infty} g_x(x) = \ln 1 = 0$

Πρόσημο της $g_x(x)$: Αυτό εξαρτάται απ το πρόσημο της Διαφοράς $D = x^2 - ax + 4 - x^2 = a(\frac{4}{x} - x)$. Αν $a=0$ $g_x(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^+$. Αν $a \neq 0$ το πρόσημο της D , δίνεται απ τους δύο πίνακες

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline g_x(x) & + & 0 & - \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 4/a & 0 \\ \hline g_x(x) & - & 0 & + \end{array}$$

3. α. $f_x(x) = \ln(x^2 - 2x + 4)$ με απλό πίνακα μεταβολών.

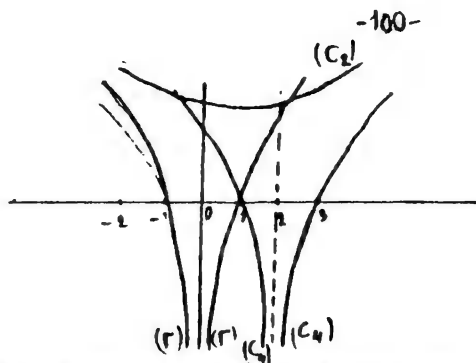
Είναι η καμπύλη C_2 στο σχήμα. Οι άκρυνες θέσεις των δύο καμπύλων, εξαρτώνται απ το πρόσημο της $g_2(x) = f_2(x) - \varphi(x)$. Η προηγούμενη βελτέτιση εύρησε δείχνει ότι η $g_2(x) > 0$ για $x < 2$ και $g_2(x) < 0$ για $x > 2$. Άρα η C_2 βρίσκεται "πάνω" απ τη (Γ) για $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ κ.ο.

β. $f_y(x) = \ln(x-2)^2$ $f_{-y}(x) = \ln(x+2)^2$

Οι μεταβολές τους δίδονται απ τους πίνακες:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 2 & +\infty \\ \hline f_y(x) & +\infty & -\infty & +\infty \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -2 & +\infty \\ \hline f_{-y}(x) & +\infty & -\infty & +\infty \end{array}$$

Η C_4 δίνεται στο ίδιο σχήμα ως συνέχεια.



82. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση και να γίνει η γραφική της παράσταση.

2. Μπορεί να οριστεί η αντίστροφη $f^{-1}(x)$ για όλες τις τιμές του x ; Να γίνει η γραφική παράσταση της αντίστροφης στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(ΡΑΦ. Ο. ΙΑΚΑΡ)

ΛΥΣΗ.

1. Η $f(x)$ ορίζεται όταν $\ln x$ είναι αυστηρά θετική δηλ. όταν $x > 1$. Η $f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} > 0$ άρα είναι γ. αύξουσα. Μεινύεται για $x = e$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Πλάγια ασύμπτωτος δεν υπάρχει, γιατί $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x, y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0$.

Άρα είναι μια παραβολή (C).

2. Όταν $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f(x) \in (-\infty, \infty)$. Άρα για οποιαδήποτε πραγματική τιμή u , υπάρχει μοναδικό x , ώστε $u = \ln(\ln x)$ ή $e^u = \ln x$ ή $x = e^{e^u}$. Δηλαδή $f^{-1}(x) = e^{e^x}$. Η γραφική της παράστασης είναι ευχρηστή της (C) ως προς τη πρώτη διχοτόμο.

83. Αν $\psi \in \mathbb{R}$ θέτω $\chi = -\frac{1-e^\psi}{1+e^\psi}$

1. Να εκφραστεί ο ψ συναρτήσει του χ : έστω $f(\chi)$ η έκφραση που προκύπτει. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(\chi)$.

2. Να λυθεί στο \mathbb{R} η εξίσωση $f(\chi) = -1/2$ όπου χ , είναι ο άγνωστος.

(BACC/ B. NICE)

ΛΥΣΗ.

1. Α. $\chi \neq -1$ έχω $(\chi+1)e^y = 1-\chi \Leftrightarrow e^y = \frac{1-\chi}{1+\chi}$
 και για $(\chi+1)(1-\chi) > 0$ έχω $y = \ln \frac{1-\chi}{1+\chi}$. Το πεδίο ορισμού της $f(\chi)$ δίνεται από την $(1-\chi)(1+\chi) > 0$ δηλ.
 $D = (-1, 1)$.

$$2. \left\{ \begin{array}{l} \chi \in (-1, 1) \\ y = \ln \frac{1-\chi}{1+\chi} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1-e^y}{1+e^y} \\ y \in (-\infty, \infty) \end{array}$$

Έχουμε λοιπόν $f(\chi) = y = -\frac{1}{2}$ αν και μόνο αν

$$x = \frac{1-e^{-1/2}}{1+e^{-1/2}} = \frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}+1} \approx 0,24$$

84. Να λυθεί η εξίσωση: α. $\log(\chi-12) - \log(\chi-6) = \log \chi$

β. $\log(12-\chi) - \log(6-\chi) = \log \chi$

γ. $\log|\chi-12| - \log|\chi-6| = \log \chi$ (BACC. BESANCON)

ΛΥΣΗ

α. Η εξίσωση ορίζεται στο $(12, \infty)$ στο οποίο μετασχηματίζεται: $x-12 = x(x-6)$; $x^2 - 7x + 12 = 0$ με $x=3, x=4$. Αυτές δεν ανήκουν στο $(12, \infty)$, άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.

β. Αυτή ορίζεται στο $(0, 6)$ άρα έχει εύνολο ζεύγος το $S = \{3, 4\}$.

γ. Αυτή ισοδυναμεί με τα εξής τρία συστήματα:

$$\text{I. } \begin{cases} 0 < x < 6 \\ \log(12-x) - \log(6-x) = \log x \end{cases} \quad \mu \epsilon \quad S = \{3, 4\}$$

$$\text{II } \begin{cases} 6 < x < 12 \\ \log(12-x) - \log(x-6) = \log x \end{cases} \quad \dot{\vee} \quad \begin{cases} 6 < x < 12 \\ x^2 - 5x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \right\}$$

$$\text{III } \begin{cases} x > 12 \\ \log(x-12) - \log(x-6) = \log x \end{cases} \quad \dot{\vee} \quad \begin{cases} x > 12 \\ x^2 - 5x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow S = \emptyset.$$

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση f_0G που ορίζεται στο $R - \{-1, 1\}$. Είναι άρτια ή περιττή; Να απλοποιηθεί ο τύπος της. Να βρεθούν τα όριά της στα και να χαραχτεί η καμπύλη της.

(BACC. C MONTPELLIER 1984)

92.1. Να δειχτεί ότι $x \in R$ και $x > 0$ ισχύει:

$$x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x$$

2. Να προσδιορίσετε το όριο της ακολουθίας (a_n) με γενικό όρο:

$$a_n = (1 + 1/n^2)(1 + 2/n^2) \dots (1 + (n-1)/n^2)(1 + n/n^2)$$

(Ισχύει ότι: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$)

(BACC. C. LA REUNION 1984)

93.1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$

Να μελετηθούν οι μεταβολές της και να χαραχτεί η καμπύλη της, C . Δείξτε ότι η C , έχει μια πλάγια ασύμπτωτη και ένα κέντρο συμμετρίας, I .

2. Υπολογίστε το εμβαδόν $A(a)$, του μέρους του επικέδου, που περιέχεται στην καμπύλη C , στην ευθεία Δ (ασύμπτωτη) και στις ευθείες $x=1$ και $x=a$ όπου $a: 0 \leq a \leq 1$ (ολοκλήρωση κατά παράγοντας)

Να μελετηθεί το $\lim_{a \rightarrow 0^+} A(a)$

(BACC. C DAKAR 1984)

94. Δίνεται η συνάρτηση:

$$x < 0 \quad F(x) = -e^x + x + 1$$

$$x = 0 \quad F(0) = 0$$

$$x > 0 \quad F(x) = x^2 \ln x$$

1. Να δειχτεί ότι είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Να μελετηθούν οι μεταβολές της.

2. Ονομάζουμε C την γραφική της παράσταση.
Δείξτε ότι η ευθεία $\psi = x + 1$ είναι μια ασύμπτωτη της C. Κατασκευάστε την C.

3. Δίνεται $0 < \eta < 1$. Να υπολογίστε συναρτήσει του η το $I(\eta) = \int_{\eta}^1 F(x) dx$. Ομοίως το $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} I(\eta)$

(BACC E. POITIERS 1983)

95. Δίνεται η οικογένεια συναρτήσεων:

$F_{\lambda}(x) = -x - 1 + \lambda e^x$ και ονομάζουμε C_{λ} τις καμπύλες της οικογένειας.

1.α. Να δειχτεί ότι όλες οι καμπύλες C_{λ} έχουν την ίδια πλάγια ασύμπτωτη Δ , όταν $x \rightarrow -\infty$

β. Να βρεθεί το όριο των F_{λ} όταν $x \rightarrow +\infty$

γ. Να μελετηθούν οι μεταβολές των F_{λ} , και οι σχετικές θέσεις των C_{λ} .

2. Εστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν ονομάσουμε M_{λ} το σημείο της C_{λ} με τετμημένη α , να υπολογιστεί η τετμημένη του σημείου N, που είναι η τομή της ευθείας Δ , και της εφαπτομένης T_{λ} , στο M_{λ} της C_{λ} .

Να διαπιστώσετε ότι οι ευθείες T_{λ} ($\lambda \in \mathbb{R}$), περνούν όλες απ' το ίδιο σημείο.

(BACC. E. STRASBOURG 1983)

96. Α. Εστω $F(x) = x - 1 - \ln|x|$ και σημειώνουμε με F_0 και F_1 τους περιορισμούς της F , πάνω στα \mathbb{R}_+^* και \mathbb{R}_-^* αντίστοιχα. Επίσης έστω γ , γ_0 και γ οι αντίστοιχες καμπύλες τους.

Ι. α. Για κάθε n , θεωρούμε την ευθεία D_n με εξίσωση $\psi = x + n$.

Δείξτε ότι η D_n τέμνει την γ σε δύο σημεία με αντίθετες τετμημένες. Οι γ και γ_0 συμμετρικές (δείξτε).

β. Θεωρούμε δύο σημεία P και Q πάνω στη γ με τετμημένες x και $1/x$ αντίστοιχα και I το μέσο τους. Να δείχτε ότι το I , βρίσκεται πάνω σε μία ευθεία D_n , η οποία να προσδιοριστεί.

γ. Μελετήστε και χαράξτε τη γ .

Β. Εστω τώρα η $G(x) = -\frac{x \ln|x|}{x-1}$ $x \neq 0, 1$
 $G(0) = 0$
 $G(1) = 1$

Ι. Είναι συνεχής στο 0 ; Στο 1 ;

2. α. Είναι παραγωγίσιμη στο 0 ;

β. Είναι παραγωγίσιμη στο 1 ;

γ. Με τη βοήθεια του προσήμου της F (Α μέρος) να μελετήστε τις μεταβολές της G .

3. α. Έστω C , η καμπύλη της G , και E το σημείο της, με τετμημένη -1 . Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο E .

β. Κατασκευάστε την C .

(BACC C. ASIE ET SUD AUSTRALIE)

97. Δίνεται η $G(x) = |x|^{\frac{1}{x}} \quad x \neq 0$
 $G(0) = 0$

1. Να μελετηθούν

α. Η συνέχεια από αριστερά στο σημείο 0.

β. Η παραγωγισιμότης από δεξιά στο 0.

γ. Η συνέχεια και η παραγωγισιμότης στο 0.

2. Συμβολίζουμε με C την καμπύλη της G.

α. Μελετήστε τις μεταβολές της G.

β. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής της C και της ευθείας $\psi = 1$

γ. Να βρεθούν οι συντελεστές διευθύνσεως των εφαπτομένων της C, στα προηγούμενα σημεία.

δ. Χαράξτε την C.

(BACC E. AMERIQUE DU SUD 1984)

98. Θεωρούμε την $F(x) = 2x - x \ln x$ για $x > 0$
 $F(0) = 0$

1. Είναι συνεχής στο 0; Παραγωγίσιμη;

2. Να παρασταθεί γραφικά.

(GROUPE I 1984)

99. Έστω η $G(x) = -\frac{x}{x+1} - (\ln(x+1))$ με Π.Ο. $(-1, \infty)$

1. Δείξτε ότι $G(x) < 0 \quad \forall x > -1$

2. Η $F(x) = \frac{x(1+x)}{x}$ $x \neq 0$

$F(0) = 1$

} είναι συνεχής και παρα-

γωγίσιμη στο 0; Να παρασταθεί γραφικά.

(BACC. C. GUYANE 1984)

100. Εστω η συνάρτηση $F(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ $x \neq 0$
 $F(0) = 1$

A. 1. Να δειχτεί ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο 0. Να βρεθεί το $F'(0)$

2. Θεωρώ την $G(x) = xe^x - e^x + 1$. Να μελετηθούν οι μεταβολές της. Να εξαχθεί το πρόσημό της για όλα τα πραγματικά x .

3. Ομοίως να μελετηθούν οι μεταβολές της F . Να χαρακτηρίσει η καμπύλη της, έστω η C_F

B. Ορίζουμε την ακολουθία (α_n) :

$$\alpha_0 = 0,5$$

$$\alpha_{n+1} = F(\alpha_n)$$

1. σημειώστε πάνω στο επίπεδο τα σημεία

$M_1(\alpha_0, \alpha_1)$ $M_2(\alpha_1, \alpha_2)$ και $M_3(\alpha_2, \alpha_3)$. Τι συμβαίνει;

2. Εστω η $V(x) = e^x - x^2 - 1$

α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της V ; στο $[0, \infty)$

β. Να δειχτεί ότι η F είναι αύξουσα στο $[0, \infty)$

Επίσης είναι $V(x) \geq 0$ στο ίδιο διάστημα.

3. Να δειχτεί ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ $\alpha_{n+1} - \alpha_n = -\frac{V(\alpha_n)}{\alpha_n^2}$.

Να εξαχθεί ότι η (α_n) είναι αύξουσα.

4. Υποθέτουμε ότι η (α_n) συγκλίνει στο λ , $\lambda \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την (1), δείξτε: $V(\lambda) = 0$
 Τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

Γ. Θέτουμε $B(x) = e^x - (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!})$. Εστω $B_1 = B$
 $B_2 = B_1'$ $B_3 = B_2'$ $B_4 = B_3'$

1. Εκφράστε τα B_i για $x \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3, 4$)

2. Μελετήστε το πρόσημο του B_4 για $x \in (-\infty, 0]$

Διαδοχικά μελετήστε τις μεταβολές των B_3, B_2, B_1, B στο ίδιο διάστημα.

3. Δείξτε: $1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} \leq F(x) \leq 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!}$

101. Εστω η F , που ορίζεται:

$$\chi \in (-\infty, 0) \quad F(\chi) = \frac{e^\chi - 1}{\chi}$$

$$\chi \in [0, 1] \quad F(\chi) = \sin \pi \chi$$

$$\chi \in (1, \infty) \quad F(\chi) = 1 + \frac{\ln \chi}{\chi}$$

1. Να μελετηθεί η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα της F στο \mathbb{R} .

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^e F(x) dx$ αφού προηγουμένως αποδειχτεί η ύπαρξη αυτού.

(BACC E/ POITIERS 1984)

102. Εστω η $F(\chi) = 3(e^{-2\chi} - e^{-3\chi})$

1. Πίνακας μεταβολών της.

2. Εστω C η καμπύλη της.

α. Χαράξτε τη C

β. Υπολογίστε το εμβαδόν $E(\mu) > 0$, που ορίζεται στο επίπεδο: $0 \leq \chi \leq \mu$

$$0 \leq \psi \leq F(\chi)$$

γ. Υπολογίστε το όριο του $E(\mu)$, όταν $\mu \rightarrow \infty$

3. Εστω η $G(\chi)$ περιορισμός της $F(\chi)$ στο διάστημα $I = [3/2, +\infty)$. Να δείχτε ότι η $G(\chi)$ είναι "I-I και επλ" του I , σ'ένα διάστημα J , που να προσδιοριστεί. Να εξάγετε ότι υπάρχει μια μοναδική τιμή α , του I , έτσι ώστε $G(\alpha) = 1/3$

(SERIE C TOULOUSE 1985)

Άρα η $f(x)=1$ ισχύει μόνον όταν $x=-\sqrt{2}$

3. Στο $(-\infty, 0]$ έχω $x^2-1=\mu \Leftrightarrow x^2=\mu+1$

αν $\mu < -1$ δεν υπάρχει λύση

αν $\mu \geq -1$ έχουμε $x = -\sqrt{\mu+1}$

Στο $(0, \infty)$: $\frac{x+1}{x}=\mu \Leftrightarrow (\mu-1)x=1$

Αν $\mu \leq 1$ δεν υπάρχει λύση

αν $\mu > 1$ έχουμε $x = \frac{1}{\mu-1}$

Άρα τελικά: Αν $\mu < -1$ δεν υπάρχει λύση

αν $-1 \leq \mu \leq 1$ μία λύση $x = -\sqrt{\mu+1}$

αν $\mu > 1$ δύο λύσεις : $x = -\sqrt{\mu+1}$ $x = \frac{1}{\mu-1}$

4. Δεν είναι 1-1, γιατί απ' την προηγούμενη μελέτη κάθε στοιχείο του διαστήματος $(1, +\infty)$, είναι εικόνα δύο στοιχείων του A της f ($A=\mathbb{R}$).

5. Έστω $a > 0$ $f(a) = \frac{a+1}{a}$

Θέτουμε $-a=\beta \Rightarrow f(\beta) = a^2 - 1$

έτσι $f(a)=f(\beta)$ αν και μόνο αν $\frac{a+1}{a} = a^2 - 1$

Αφού $a > 0 \Rightarrow a+1 \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται $\frac{1}{a} = a-1$ ή $a^2 - a - 1 = 0$ με $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($a > 0$)

Άρα μια μοναδική τιμή του μ υπάρχει:

$$\mu = a^2 - 1 = a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

14.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{1+x|x|}$ $x \in \mathbb{R}$

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων και έπειτα να λυθεί η εξίσωση $f(x) = g(x)$
2. Να λυθεί η ανισότητα $g(x) > f(x)$
3. Να δείχτεί ότι η $f(x)$ είναι αυστηρώς φθίνουσα στο διάστημα \mathbb{R}^+ . Τί είδους μονοτονία έχει στο \mathbb{R}^- ;
4. Να εξεταστεί η μονοτονία της $g(x)$.

(Classes de premiere A,B,C)

Λ Υ Σ Η

1. $D_f = \mathbb{R}$ εξ' άλλου $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad |x| = x$ άρα
 $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = g(x) \quad (1)$

Επίσης $\forall x \in \mathbb{R}^- \quad |x| = -x$ και $x|x| + 1 = 1 - x^2$, άρα η g δεν ορίζεται για $x = -1$ $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

Η $f(x) = g(x)$: Απ' τη σχέση (1) προκύπτει ότι το \mathbb{R}^+ περιέχεται στο σύνολο των λύσεων της.

Για να υπάρχουν λύσεις αυστηρά αρνητικές πρέπει

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow 1+x^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2x^2 = 0 \text{ που δίνει αρνητικές λύσεις.}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι στο \mathbb{R}^+ .

2. Η ανισότητα $g(x) > f(x)$: Απ' τα προηγούμενα προκύπτει ότι δεν υπάρχει καμιά θετική λύση της ανισότητας.

-65-

Για $x < 0$ και $x \neq -1$ έχω

$$g(x) - f(x) = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2}{(1-x)(1+x)}$$
 Αυτή η διαφορά

είναι θετική όταν και μόνο όταν $1-x^2 > 0$ και $x \neq 0$.

Άρα το ζητούμενο σύνολο λύσεων της ανισότητας $g(x) > f(x)$ είναι το διάστημα $(-1, 0)$.

$$\begin{aligned} 3. \text{ Αν } (a, \beta) \in \mathbb{R} \text{ έχουμε } f(a) - f(\beta) &= \frac{1}{a^2+1} - \frac{1}{1+\beta^2} = \\ &= \frac{\beta^2 - a^2}{(1+a^2)(1+\beta^2)} \text{ άρα } \frac{f(a) - f(\beta)}{a-\beta} = \frac{-(a+\beta)}{(1+a^2)(1+\beta^2)} \end{aligned}$$

Αν $(a, \beta) \in \mathbb{R}_+$ η $f(x)$ γνησίως φθίνουσα

Αν $(a, \beta) \in \mathbb{R}_-$ η $f(x)$ γνησίως αύξουσα.

4. Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η g είναι αυστηρά φθίνουσα στο \mathbb{R}_+

$$\text{Έστω } a, \beta \in \mathbb{R}_+ - \{-1\}. \text{ Έχουμε } g(a) - g(\beta) = \frac{a^2 - \beta^2}{(1-a^2)(1-\beta^2)}$$

$$\text{δηλ. } \frac{g(a) - g(\beta)}{a - \beta} = \frac{a + \beta}{(1-a^2)(1-\beta^2)} \quad (2)$$

Αν τα $a, \beta \in (-1, 0]$ έχω $a + \beta < 0$, $1 - a^2 > 0$, $1 - \beta^2 > 0$

άρα ο λόγος μεταβολής είναι αρνητικός και η $g(x)$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$. Αποδεικνύεται εύκολα

ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, +\infty)$ ένωση των δύο προηγούμενων διαστημάτων.

Θα εξετάσουμε το πρόσημο του λόγου μεταβολής (2) στο $(-\infty, -1)$. Για $\forall a, \beta \in (-\infty, -1) \Rightarrow a + \beta < 0$, $1 - a^2 < 0$, $1 - \beta^2 < 0$

$$\text{άρα } \frac{g(a) - g(\beta)}{a - \beta} < 0$$

Δηλ. γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$

Τελικά είναι γν.φθίνουσα σε κάθε ένα απ' τα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$.

Η απόδειξη για τη μονοτονία της $g(x)$ στο

$$(-1, +\infty) = (-1, 0] \cup (0, +\infty).$$

• Έστω $(\alpha, \beta) \subset (-1, +\infty)$

αν $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}_+$ τότε $\frac{g(\alpha) - g(\beta)}{\alpha - \beta} < 0$ ως γνωστό.

αν $(\alpha, \beta) \subset (-1, 0]$ ομοίως

αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, έχουμε $\alpha > \beta$, $g(\alpha) < g(0)$

αφού η g είναι γν. φθίνουσα στο \mathbb{R}_+ και $g(0) < g(\beta)$ αφού η g είναι γν. φθίνουσα στο $(-1, 0]$. Με τη μεταβατικότητα

των σχέσεων διάταξης έχουμε $g(\alpha) < g(\beta) \Rightarrow \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{\alpha - \beta} < 0$ ως

15.

θεωρούμε την ομογραφική συνάρτηση $y = \frac{\mu x - 1}{x - \mu}$

που παρίσταται γραφικά απ' την καμπύλη $(H\mu)$.

1. Για ποιές τιμές του μ , η συνάρτηση είναι φθίνουσα. Να παρασταθεί γραφικά η $(H\mu)$ για $\mu=2$. Τι συμβαίνει για $|\mu|=1$;

2. Δείξτε ότι οι $(H\mu)$ για $|\mu| \neq 1$ περνούν από δύο σταθερά σημεία A και B των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες. Τι συμβαίνει για $|\mu|=1$;

3. Να δείχτεί ότι οι δύο καμπύλες $(H\mu)$ που αντιστοι-

-67-

χούν σε δύο αντίθετες τιμές του μ είναι συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και να βρεθεί ο γ. τόπος των κέντρων συμμετρίας των (H_μ) για τα διάφορα μ .

4. Πως πρέπει να ορίσουμε το μ ώστε η (H_μ) να περνάει από το σημείο $I(a, \beta)$; Να διαφυνηθεί η θέση του I πάνω στο επίπεδο.

5. Η (H_μ) τέμνει τον Ox στο M και τον Oy στο N . Πως μετακινείται η ευθεία MN , όταν το M μεταβάλλεται; Να γράψετε την εξίσωση της.

(Bacc. 1^{ere} partie, Dakar)

Λ Υ Σ Η

1. Η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x=\mu$. Εστω x_0 και x_1 δύο τιμές της μεταβλητής μικρότερες και οι δύο ή μεγαλύτερες απ' το μ , και y_0, y_1 οι αντίστοιχες τιμές της y

$$\text{Τότε } y_1 - y_0 = \frac{\mu x_1 - 1}{x_1 - \mu} - \frac{\mu x_0 - 1}{x_0 - \mu} \Rightarrow \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - \mu^2}{(x_1 - \mu)(x_0 - \mu)}$$

Ο παρανομαστής είναι θετικός άρα συνάρτηση είναι φθίνουσα αν και $\mu < -1$ ή $\mu > +1$. Ομοίως αύξουσα αν $-1 < \mu < +1$.

Για $\mu=2$ η (H_2) είναι η γνωστή υπερβολή.

--Για $\mu=-1$ $y = \frac{x-1}{x+1} = -1$ και δεν ορίζεται για $x=-1$

Για $\mu=1$ $y=1$, δεν ορίζεται για $x=1$.

Και στις δύο περιπτώσεις, οι αντίστοιχες καμπύλες είναι

ευθείες.

2. Οι συντεταγμένες (x, y) ενός τυχόντος σημείου της $(H\mu)$ πληρούν τη σχέση $\mu(x+y)=xy+1$ (1). Η σχέση αυτή πληρείται από οποιοδήποτε μ αν $xy=0$ και $xy+1=0$ δηλαδή $x=-y$ και $x^2=1$. Άρα οι $(H\mu)$ για τυχούσα τιμή του μ , περνούν απ' τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(-1, 1)$

3. Έστω $H(x, y)$ σημείο της $(H\mu)$. Οι συντεταγμένες πληρούν τη σχέση (1) η οποία μπορεί να γραφεί και $(-x)(-y)=(-x)(-y)+1$. Αυτή η σχέση δείχνει ότι το $M'(-x, -y)$ συμμετρικό του M , ως προς την αρχή O , βρίσκεται πάνω στη καμπύλη $(H-\mu)$. Άρα οι $(H\mu)$ και $(H-\mu)$ είναι συμμετρικές ως προς την αρχή.

4. Οι τιμές του μ , που καθορίζουν τις καμπύλες δίνονται απ' την εξίσωση $\mu(a+\beta)=a\beta+1$ (2)
Αν $a+\beta \neq 0$ δηλ. αν το I δεν βρίσκεται πάνω στην AB , η (2) έχει μία λύση δηλ. μία μόνο καμπύλη $(H\mu)$ περνάει από το I . Η αντίστοιχη τιμή του μ είναι $\mu = \frac{a\beta+1}{a+\beta}$. Αν $a+\beta=0$ και $a\beta+1 \neq 0$ δηλ. αν το I βρίσκεται πάνω στη AB και είναι διάφορο των A και B η εξίσωση (2) είναι αδύνατη και καμιά καμπύλη $(H\mu)$ δεν περνάει απ' το I . Αν $a+\beta=0$ και $a\beta+1=0$ δηλ. αν το I είναι στο A ή στο B , η εξίσωση (2) είναι αόριστη και όλες οι καμπύλες $(H\mu)$ περνούν απ' το I , πράγμα το οποίο βρήκαμε στο ερώτημα 2.

5. Το M έχει τεταγμένη $y = \frac{1}{\mu}$. Το N έχει τεταγμένη $y = \frac{1}{\mu}$. Η ευθεία MN λοιπόν είναι σταθερά παράλληλη στη δεύτερη διχοτόμο των αξόνων. Ο συντελεστής της κατευθύνσεως είναι -1 και έχει εξίσωση $y = -x + \frac{1}{\mu}$.

Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων που ορίζο-
νται στο $[-1, 1]$ από τις σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) &= 2x \cdot t_n(x) \\ t_0(x) &= 1 \\ t_1(x) &= x \end{aligned} \right\}$$

1. Να δείξετε ότι η $t_n(x)$ είναι πολυώνυμο n βαθμού και
και υπολογίστε τον συντελεστή του μεγιστοβαθμίου του
όρου.

2. Να δείξετε ότι για $n \in \mathbb{N}$ η t_{2n} είναι άρτια συνάρτη-
 ση και η t_{2n+1} περιττή.

3. Για $0 \leq \theta \leq \pi$ θέτοντας $x = \cos(\theta)$ με $\cos(\theta) = \cos \theta$, να δείχ-
τεί ότι η σύνθεση $(t_n \circ \cos)(\theta) = \cos(n\theta)$

(Baccalauréat Maroc)

Λ Υ Σ Η

1. Από τη υπόθεση οι $t_0(x)$ και $t_1(x)$ είναι πολυώνυμα 0, και πρώτου βαθμού αντίστοιχα. Ο αναγωγικός τύπος δίνει:
 $t_2(x) = 2xt_1(x) - t_0(x) = 2x^2 - 1$ δηλ. η $t_2(x)$ είναι πολυώνυμο
 δευτέρου βαθμού. Υποθέτουμε ότι η $t_n(x)$ είναι πολυώνυμο n
 βαθμού καθώς και η $t_{n-1}(x)$ είναι $n-1$ βαθμού.

Τότε $t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x)$ (1) δηλ. βαθμού $n+1$

2. Η $t_1(x)$ είναι περιττή, η $t_2(x)$ άρτια.

Υποθέτουμε πως η $t_n(x)$ έχει την ίδια parity (είναι
 άρτια ή περιττή) με το μονώνυμό της που έχει το μεγαλύτερο
 βαθμό.

-70-

Τότε το πολυώνυμο $2xt_v(x)$ έχει διαφορετική parity απ το $t_v(x)$. Έχει λοιπόν την ίδια parity με το $t_{v-1}(x)$. Άρα απ' την (1) το $t_{v+1}(x)$ έχει ίδια parity με το $t_{v-1}(x)$.

Άρα οι συναρτήσεις $t_{2p}(x)$ είναι άρτιες και οι $t_{2p+1}(x)$ περιττές.

3. $(t_1 \circ \varphi)(\theta) = \sin \theta$. Απ' τον αναδρομικό τύπο έχουμε

$$(t_2 \circ \varphi)(\theta) + 1 = 2 \sin \theta, (t_1 \circ \varphi)(\theta) = 2 \sin \theta, \sin \theta = \sin 2\theta + 1$$

$$(t_2 \circ \varphi)(\theta) = \sin 2\theta. \text{ Ο τύπος ισχύει για } n=1, n=2$$

Έστω ότι ισχύει για $n=n$ δηλ. $(t_n \circ \varphi)(\theta) = \sin n\theta$

Απ' τον αναδρομικό τύπο έχω:

$$(t_{n+1} \circ \varphi)(\theta) + (t_{n-1} \circ \varphi)(\theta) = 2 \sin \theta [t_n \circ \varphi](\theta) = \\ = 2 \sin \theta \sin n\theta = \sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta.$$

Επειδή δε έχουμε $(t_{n-1} \circ \varphi)(\theta) = \sin(n-1)\theta$ έχουμε τελικά

$$(t_{n+1} \circ \varphi)(\theta) = \sin(n+1)\theta. \text{ Άρα ο τύπος ισχύει } \forall n \in \mathbb{N}.$$

17.

Έστω η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται απ' το τύπο $f(x) = x + 1 + \left| \frac{x}{2} - 1 \right|$.
Να χαρακτηρίσει η καμπύλη που παριστάνει την $f(x)$ σε ορθό σύστημα αξόνων. Με τη βοήθεια αυτής να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \mu$ με άγνωστο το x . Να εξηγήσετε γιατί η f είναι 1-1, και να αποδείξετε ότι η ανάστροφη της είναι η $g(x) = \frac{4}{3}x - 2 - 2\left|1 - \frac{x}{3}\right|$. Να χαράξετε την καμπύλη της $g(x)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

-71-

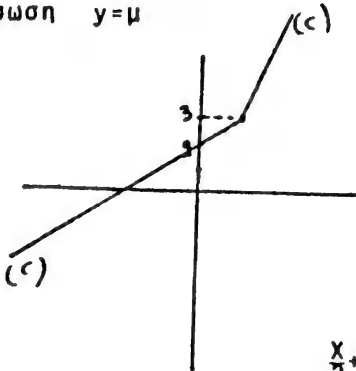
Λ Υ Σ Η

Μετά την εξαγωγή του απόλυτου, η $f(x)$ γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} & x \geq 2 \\ \frac{x}{2} + 2 & x < 2 \end{cases}$$

Το κοινό σημείο των δύο κλάδων είναι το $A(2,3)$

Η λύση της $f(x)=\mu$, ισοδυναμεί με τη μελέτη της τομής της καμπύλης (C) της $f(x)$ με την ευθεία (D) μ με εξίσωση $y=\mu$



Αν $\mu=3$ έχουμε $x=2$ αφού το μόνο σημείο της (C) με τετμημένη 3 είναι το A.

Αν $\mu < 3$ η (D) τέμνει τη (C) σ' ένα σημείο της ευθείας με εξίσωση $y=\frac{x}{2}+2$. Άρα η δοθείσα γράφεται:

$$\frac{x}{2}+2=\mu \Rightarrow x=2(\mu-2). \text{ Αν } \mu > 3 \text{ η εξίσωση ομοίως γράφεται } \frac{3x}{2}=\mu \Rightarrow x=\frac{2\mu}{3}$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου μ λοιπόν, η $f(x)=\mu$ έχει μία μοναδική λύση. Δηλ. η f είναι 1-1.

Άρα για κάθε μ , ο αριθμός $g(\mu)$ είναι λύση της $f(x)=\mu$

Αν λοιπόν $\mu \leq 3 \Rightarrow 1-\frac{\mu}{3} \geq 0$ ή $|1-\frac{\mu}{3}|=1-\frac{\mu}{3}$ και

$$g(\mu) = \frac{4\mu}{3} - 2(1-\frac{\mu}{3}) = 2(\mu-2)$$

Ομοίως αποδεικνύεται αν $\mu > 3$.

Τέλος η γραφική παράσταση της g είναι η ένωση δύο ημιευθειών με αρχή το $B(3,2)$. Η μία είναι $x \leq 3$ και $y=2(x-2)$

-72-

και η άλλη $x \geq 3$ και $y = \frac{2x}{3}$.

Αυτή είναι συμμετρική της παράστασης της $f(x)$ ως προς τη πρώτη διχοτόμο, αφού οι συναρτήσεις είναι αντίστροφες.

18.

~~18.~~ Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$$

1. Μελετήστε την εξίσωση $f(x) = \mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$)
2. Η απεικόνιση είναι 1-1; Είναι "επί";
3. Ποιό είναι το πεδίο τιμών;

(Classes de première C, D, E)

Λ Υ Σ Η

1. Η $f(x) = \mu$ γράφεται $\frac{2x+1}{x^2+1} = \mu \quad \mu x^2 - 2x + \mu - 1 = 0 \quad (1).$

Για $\mu \neq 0$ είναι δευτετοβάθμια με

$$\Delta' = 1 - \mu(\mu - 1) = -\mu^2 + \mu + 1, \text{ με ρίζες της } \Delta' \text{ τις } \mu = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Αρα για $\mu < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ή $\mu > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $\Delta' < 0$ και η (1) δεν έχει λύση.

Για $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < \mu < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ η (1) δέχεται 2 ρίζες

Για $\mu = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ η (1) δέχεται διπλή ρίζα.

2. Έτσι λοιπόν η συνάρτηση f_1 , δεν είναι 1-1 αφού

-73-

για ωρισμένες τιμές του μ , η $f(x)=\mu$ δέχεται δύο ρίζες. Έτσι οι αριθμοί μ , είναι εικόνες δύο στοιχείων του R μέσω της f , πράγμα που αποκλείει το 1-1.

Επίσης δεν έλκει η f επί, αφού για ωρισμένα μ , η $f(x)=\mu$ δεν έχει λύση. Τα μ αυτά λοιπόν δεν είναι ακόνες κανενός στοιχείου του R μέσω της f .

3. Το πεδίο τιμών, είναι το σύνολο των τιμών του μ , για τα οποία η $f(x)=\mu$ έχει τουλάχιστον μία λύση.

$$\text{Άρα } f(R) = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right].$$

Α Λ Υ Τ Α Θ Ε Μ Α Τ Α Σ Τ Ι Σ Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ

1. Δίδεται η $y=x(4-x)$

1. Να παρασταθεί γραφικά (C)

2. Μια ευθεία με κλίση 1 και τεταγμένη επί την αρχή μ , τέμνει την καμπύλη (C) σε δύο σημεία τα M και N, ενώ η παράμετρος μ , είναι μικρότερη από μια τιμή μ_0 , η οποία να προσδιοριστεί.

3. Ποιός είναι ο γεωμ. τόπος του μέσου I του MN όταν το μ μεταβάλλεται;

4. Εκφράστε το τετράγωνο της απόστασης MN συναρτήσει του μ .

5. Να προσδιοριστεί το μ , ώστε η απόσταση του I και της κορυφής S της καμπύλης (C) ισούται με το μισό του MN.

(Bacc. 1^{ere} partie, series cl. A' Montreal)

2. Έστω (P) και (P') οι καμπύλες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$y_1 = (x+\mu-3)^2 - 4 \quad \text{και} \quad y_2 = (x+2\mu)^2 - 4 \quad \text{αντίστοιχα.}$$

1. Να κατασκευαστούν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι καμπύλες (P_0) και (P'_0) που αντιστοιχούν στην τιμή $\mu=0$.

Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο αυτών καμπύλων.

Να δείχτεί ότι οι (P_0) και (P'_0) είναι συμμετρικές ως προς άξονα, παράλληλου του Oy

2. Ποιός είναι ο γ. τόπος των κορυφών των καμπύλων (P) και (P') όταν το μ μεταβάλλεται;

Να υπολογιστούν συναρτήσεις του μ , οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των καμπύλων (P) και (P')

Για ποιά τιμή του μ , οι δύο καμπύλες ταυτίζονται;

(Bacc. 1^{re} partie, serie tech. A, Alger)

3. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$1. y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$$

$$2. y = \sqrt{x - 4x + 3}$$

$$3. y = \sqrt{1 - |x|}$$

$$4. y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$$

$$5. y = \sqrt{\log \frac{5x - x^2}{4}}$$

$$6. y = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$$

Απάντηση

$$1. (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \quad 2. (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

$$3. [-1, 1] \quad 4. (-\infty, 0)$$

$$5. [1, 4] \quad 6. [-2, 0) \cup (0, 1)$$

4. 1. Να δειχτεί ότι $f(x) + f(-x)$ είναι όρτια συνάρτηση

ενώ η $f(x) - f(-x)$ είναι περιττή

2. Να γράψτε τις παρακάτω συναρτήσεις σαν άθροισμα όρτιας και περιττής συνάρτησης:

$$\alpha. y = a^x \quad \beta. y = (1+x)^{100}$$

5. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφημάτων των

$$y = |\lambda - \lambda x| \quad \text{και} \quad y = ||\lambda| - |\lambda x||$$

6. Δίνεται η ομογραφική $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$

-76-

1. Να ορισθούν τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ώστε η υπ'αυτής οριζόμενη καμπύλη, να περνάει απ'το $A(2,3)$ και να τέμνει τον Ox σε σημείο με τετμημένη -1 , και τον Oy σε σημείο με τεταγμένη -1 .

2. Με τις τιμές που βρέθηκαν να χαρακτηί η καμπύλη (C) της συνάρτησης.

3. Απ'την αρχή O , περνάει ευθεία μεταβλητή. Να βρεθεί το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας με την (C) . Όταν υπάρχουν δύο κοινά σημεία M_1, M_2 να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του μέσου P του τμήματος $M_1 M_2$. Ποιό είναι το σύνολο αυτών των σημείων;

4. Να βρεθούν τα κοινά σημεία του προηγούμενου γεωμ. τόπου και της καμπύλης (C)

(Partie de Bacc. C et E, Dijon)

7. Έστω η $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται

$$f(0)=5$$

$$f(n+1)=2f(n)$$

1. Να εκφράστε το $f(n)$ συναρτήσει του $f(0)$

Η $f(n)$ έχει όριο όταν $n \rightarrow \infty$;

2. Υπολογίστε τα $f(2), f(4), f(6)$

3. Να δειχτεί ότι $f(n) \cdot f(m) = 5(n+m)$

(Bacc. A Maroc)

Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ και Π Α Ρ Α Γ Ω Γ Ο Ι

1

Έστω η $f(x) = (x + \frac{1}{2})(x^2 + x + \frac{5}{4})$

α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της

β. Έστω (C) η καμπύλη που παριστά την $f(x)$

Να βρεθούν οι τεταγμένες των σημείων της (C) με αντίστοι-
χες τετμημένες $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

Να δοθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (T) της καμπύλης (C)
στο σημείο I με τετμημένη $-\frac{1}{2}$. Ναδειχτεί ότι το I είναι
κέντρο συμμετρίας της καμπύλης (C) και να προσδιορίσε-
τε τη θέση της (C) σε σχέση με την ευθεία (T) ως προς
το σημείο I. Να χαράξετε την (C)

(Partie du bacc. B, Lille)

Λ Υ Σ Η

α. Η $f(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, ορισμένη σ'όλο το \mathbb{R} με $f'(x) = 3x^2 + 3x + \frac{7}{4} > 0$ $\forall x \in (-\infty, \infty)$. Άρα η f είναι γν. αύξουσα σ'όλο το πεδίο της ορισμού.

Είναι επίσης $f(x) = x^3(1 - \frac{1}{2x})(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{4x^2})$ δηλ.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

β. $I(-\frac{1}{2}, 0)$ $A(-\frac{3}{2}, -2)$, $B(\frac{1}{2}, 2)$. Είναι $f'(-\frac{1}{2}) =$

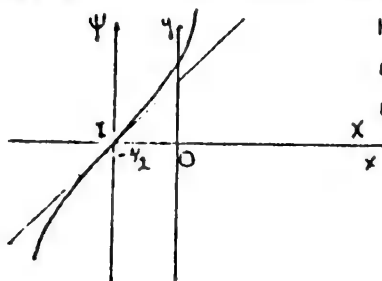
$$\frac{3}{2} + \frac{7}{4} = 1 \text{ άρα η εξίσωση εφαπτομένης (T): } y = x + \frac{1}{2}$$

Με αλλαγή συστήματος αξόνων ως εξής:

- 72 -

$x = X - \frac{1}{2}$ η εξίσωση της (C) στο νέο σύστημα γίνεται
 $y = \psi$ $\psi = X \left[\left(X - \frac{1}{2} \right)^2 + X - \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \right]$ ή $\psi = X(X^2 + 1)$ δηλ. είναι
 περιττή συνάρτηση και επομένως, συμμετρική
 η (C) ως προς την αρχή του νέου συστήμα-
 τος δηλ. του I.

Στο νέο σύστημα η (T) έχει εξίσωση $\psi = X$ άρα η θέση της
 (C) ως προς την (T) εξαρτάται απ'τη διαφορά
 $\varphi(X) - X = X(X^2 + 1) - X = X^3$ δηλ. η (C) είναι "κάτω" απ'την (T)
 για $X < 0$ και πάνω απ'την (T) για $X > 0$
 (Το σημείο I είναι σημείο καμπής της C)



Η γραφική παράσταση της $f(x)$
 είναι χωρίς λεπτομέρειες η
 εξής:

2.

Έστω η $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

Να μελετηθούν οι μεταβολές της. Να βρεθεί το σημείο
καμπής. Να γίνει η γραφική παράσταση της. Να βρεθεί
η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x=0$

(Partie du bacc.O, Besançon).

- 79 -

ΛΥΣΗ

Είναι $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα είναι παντού αύξουσα.

Επίσης $f(x) = 1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1 + \frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ άρα

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ αφού $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{|x|} = \pm 1$

δηλ. έχουμε τις ασύμπτωτες $y=0$ και $y=2$

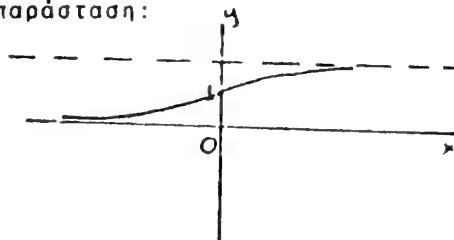
Για το σημείο καμπής βρίσκουμε τη β' παράγωγο. Είναι $f''(x) =$

$= - \frac{3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$ με ρίζα το $x=0$. Και καθώς η $f''(x)$

αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x=0$, το σημείο $I(0,1)$ είναι το σημείο καμπής.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $I(0,1)$ είναι: $y=x+1$

Γραφική παράσταση:



3.

Έστω η $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x-2}$

1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της $f(x)$

α. Πεδίο ορισμού

β. Όριο της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

- 80 -

γ. Πρόσημο της παραγώγου της.

2. Γραφική παράσταση της $f(x)$. Εξίσωση εφαπτομένης της, στο $x=-2$

(Bacc.A,Nantes)

Λ Υ Σ Η

1. α. Πεδίο ορισμού: $R - \{-1, 2\}$

β. Όρια στα άκρα του πεδίου ορισμού:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array}$$

$$\text{και τελικά } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$

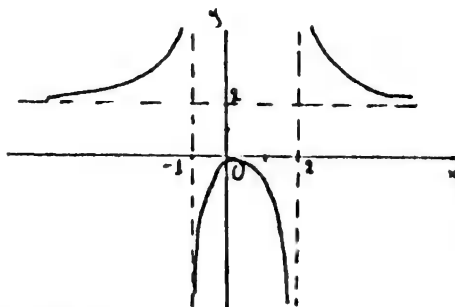
$$\gamma. \text{ Είναι } f'(x) = -\frac{3x(x+4)}{(x^2-x-2)^2}$$

Και έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολής της $f(x)$.

x	$-\infty$	-4	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+	+	0	—
$f(x)$	2 ↘	5/3 ↗	+	—	+	2 ↘

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι η εξής:

- 81 -



Ασύμπτωτες οι
 $x=2, x=-1, y=2$

Εξίσωση εφαπτομένης στο
 $A(-2, 2) : y = \frac{3x}{4} + \frac{7}{2}$

4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

1. Να μελετήσετε τις μεταβολές της $f(x)$
2. α. Μέσα στο διανυσματικό χώρο E των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 3ου, τα πολυώνυμα $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$ αποτελούν μια βάση B . Να αναλυθεί στη βάση αυτή το πολύνομο του $E: (x+1)^3$. Να συμπεράνετε έτσι ότι για κάθε $x \neq 1$, η $f(x)$ παίρνει τη μορφή:

$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1} + \frac{\delta}{(x-1)^2}$ όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ να προσδιοριστούν.

β. Απ' τα προηγούμενα να συμπεράνετε ότι η καμπύλη (C) που απεικονίζει την $f(x)$, δέχεται μια ασύμπτωτη (P) όχι παράλληλη προς τους άξονες.

Να χαρακτηρίσει η (C)

(Partie du bacc.D, Nantes)

- 82 -

Λ Υ Σ Η

i. Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \{1\}$ $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$

άρα το πρόσημό της αλλάζει στο 1 και στο 5.
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ και αν γράψουμε $f(x) = \frac{(1+\frac{1}{x})^3}{(1-\frac{1}{x})^3}$ έχουμε

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	5	$+\infty$				
$f'(x)$	+	0	+	-	0	+			
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$	\searrow	$27/2$	\nearrow	$+\infty$

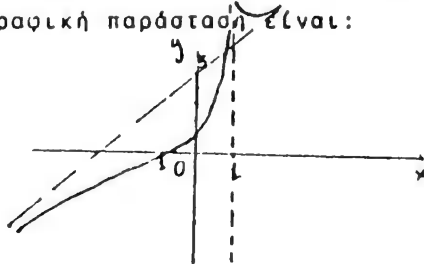
2. Ανάλυση του πολυωνύμου $(x+1)^3$:

Είναι $(x+1)^3 = [(x-1)+2]^3 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 \cdot 2 + \dots =$
 $= (x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 12(x-1) + 8$. Άρα στο πεδίο ο-
 ρισμού της η $f(x) = x-1 + 6 + \frac{12}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2}$ άρα $\alpha=1$ $\beta=5$ $\gamma=12$
 $\delta=8$

β. Απ' την προηγούμενη έκφραση έχω

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - (x+5)] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{12}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2} \right] = 0 \text{ δηλ. η ευθεία}$$

$y=x+5$ είναι ασύμπτωτη της $f(x)$, όχι παράλληλη των α-
 ξόνων. Η γραφική παράσταση είναι:



- 83 -

Να μελετηθούν οι μεταβολές και να γίνει η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{x-4}{|2x+1|}$

(Bacc A, Besançon)

Λ Υ Σ Η

εδίο ορισμού $D = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$, αλλά δεν έχει (δία έκφραση σ' όλο το D)

Ετσι $f(x) = f_1(x) = -\frac{x-4}{2x+1}$ για $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

και $f(x) = f_2(x) = \frac{x-4}{2x+1}$ για $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$

δηλαδή $f_2(x) = -f_1(x)$ Ετσι θα μελετήσω την $f_2(x)$

θα έχω συμπεράσμα για την $f(x)$

Στο $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ έχω $f'_2(x) = \frac{9}{(2x+1)^2} > 0$ Δηλαδή η f_2

αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{2})$ άρα η f_1 γνησίως φθίνουσα

διάστημα αυτό. Η f_2 ομοίως γν. αύξουσα στο $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$x \rightarrow -\frac{1}{2}$

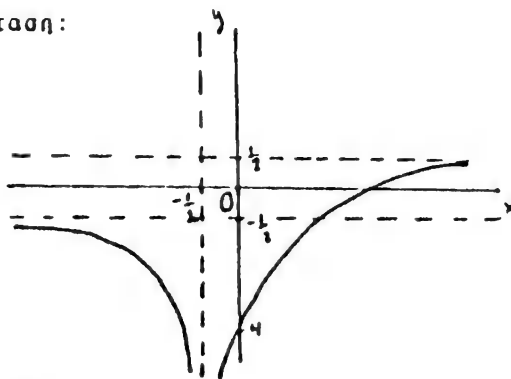
$x \rightarrow +\infty$

Τίνακας μεταβολής είναι

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$

- 84 -

Η γραφική παράσταση:



6. *** Σ.Ο.Σ.

1. Έστω $f(x) = \frac{x^2 + px + q}{4x}$ όπου $p, q \in \mathbb{R}$

Έστω (C) η καμπύλη της $f(x)$ σε ορθ. άξονες.

Να προσδιοριστούν τα p και q ώστε η (C) να πληρεί τις εξής ιδιότητες:

α) Να περνάει απ' το σημείο $A(-2, 0)$

β) Να δέχεται στο A μια εφαπτομένη παράλληλη της $y=0$

2. Έστω η $g(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x}$ και έστω (Γ) η καμπύλη της (C) στο ίδιο σύστημα αξόνων.

α) Να μελετηθούν οι μεταβολές της $g(x)$.

β) Έστω (D) η ευθεία με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + 1$

Έστω επίσης M και Q δύο σημεία που βρίσκονται αντίστοιχα στις (Γ) και (D) με την ίδια τετμημένη. Να βρεθεί το

$\lim_{x \rightarrow \infty} \overline{MQ}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{MQ}$. Τι συμπεραίνετε απ' αυτό;

γ) Να χαρακτηί η (Γ).

γ) Να δείχτεί ότι το σημείο $(0, 1)$ είναι κέντρο συμμετρίας της (Γ)

(Partie du bacc.B.Nantes)

.. - 85 -

Λ Υ Σ Η

1. Τα p και q βρίσκονται απ' τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 0 & \text{Επειδή } f'(x) &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{q}{x^2}\right) \text{ το σύστημα} \\ f'(-2) &= 0 & \text{γίνεται } 4 - 2p + q &= 0 & p &= 4 \end{aligned}$$

$$1 - \frac{q}{4} = 0 \quad q = 4$$

$$\text{Άρα η } f(x) = \frac{x}{4} + 1 + \frac{1}{x} = g(x)$$

$$2. \alpha. \quad g'(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{4x^2} \quad \text{δηλ. αλλάζει πρόσημο στα } \pm 2$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty \quad \text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} g(x) = \pm\infty$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$-\infty$	\nearrow	0	\searrow	$+\infty$

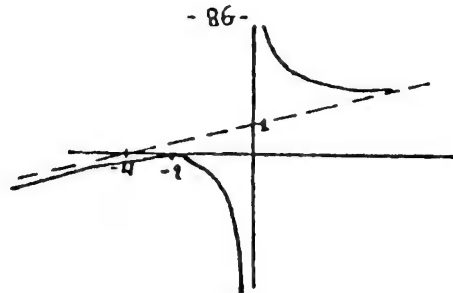
β. Έστω H , με τετμημένη x η κοινή προβολή των M και Q στον Ox . Έχουμε $\overline{MQ} = \overline{HQ} - \overline{HM} = \frac{1}{4}x + 1 - \left(\frac{1}{4}x + 1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{MQ} = 0_- \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \overline{MQ} = 0_+$$

Αυτό σημαίνει ότι η $(D): y = \frac{1}{4}x + 1$ είναι ασύμπτωτη της (Γ) .

γ. Αν αναφέρουμε την $g(x)$ σε νέο κατάλληλο σύστημα προκύπτει περιττή. Άρα οεδ

δ. Η γραφική παράσταση:



7.

Θεωρούμε τις $f(x) = \frac{x(x-2)}{3}$ και $g(x) = \frac{3}{x(x-2)}$

Να γίνουν οι γραφικές τους παράστασεις.

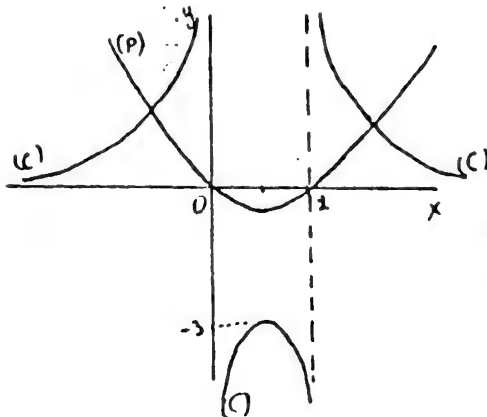
Να βρεθούν τα κοινά σημεία των καμπύλων τους.

Να δειχτεί ότι έχουν οι δύο καμπύλες τον ίδιο άξονα συμμετρίας.

(Partie du bacc. O, Algerie).

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f(x)	$+\infty \searrow 0$		$-1/3$	0	$+\infty$
g(x)	0 $\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -3$	$-3 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	

Οι πίνακες μεταβολών των δυο συνάρτησεων



Η (P) είναι η καμπύλη της $f(x)$ και η (C) της $g(x)$.

Τα κοινά σημεία M και N προκύπτουν απ' τη λύση $\frac{x(x-2)}{3} = \frac{3}{x(x-2)}$

- 87 -

$(x^2-2x-3)(x^2-2x+3)=0$ και επειδή $\forall x: x^2-2x+3 \neq 0$
 $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ και $x=3$ Άρα τα σημεία είναι
 $M(-1,1)$ $N(3,1)$

Για τον κοινό άξονα συμμετρίας:

Η $g(x)$ γράφεται $g(x)=\frac{3}{(x-1)^2-1}$ άρα η $x=1$ είναι

άξων συμμετρίας (νέο σύστημα κ.λ.π., άρτια). Όμως η $x=1$ είναι και άξονας της παραβολής της $f(x)$.

8.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{ax^2+2(a-2)x+1}$ σε \mathbb{R}

1. Για ποιές τιμές του a η συνάρτηση f ορίζεται σ'όλο το \mathbb{R} ;
2. Δίνεται $a=2$. Να δείχτεί ότι η αντίστοιχη συνάρτηση είναι άρτια. Να μελετηθούν οι μεταβολές της και να χαραχτεί η καμπύλη της (Γ).
3. Δίνεται $a=0$. Να κατασκευαστεί η αντίστοιχη καμπύλη (C). Να βρεθούν τα κοινά σημεία των (Γ) και (C)

(Partie dy bacc.D, Amiens)

Λ Υ Σ Η

1. Αν $a=0$ η $f(x)=\sqrt{-4x+1}$ που ορίζεται μόνο στο $(-\infty, \frac{1}{4})$. Άρα για να ορίζεται σ'όλο το \mathbb{R} πρέπει $a \neq 0$, με την προϋπόθεση ότι το τριώνυμο

- 83 -

$\varphi(x) = ax^2 + 2(a-2)x + 1$ είναι πάντα θετικό. Πρέπει δηλ.

$$\left. \begin{aligned} \Delta' = (a-2)^2 - a \leq 0 \\ a > 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} a^2 - 5a + 4 \leq 0 \\ a > 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} (a-1)(a-4) \leq 0 \\ a > 0 \end{aligned}$$

$$1 < a < 4$$

Για $a=1$ $f(x) = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

Για $a=4$ $f(x) = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$

2. Για $a=2$ η $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$ Αυτή είναι άρτια και να τη μελετήσουμε στο $(0, \infty)$ στο οποίο

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} > 0 \quad \text{αν } x > 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x} = \sqrt{2}$ και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x\sqrt{2}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2+1} - x\sqrt{2}) = x \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x^2+1} - x\sqrt{2})(\sqrt{2x^2+1} + x\sqrt{2})}{\sqrt{2x^2+1} + x\sqrt{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2x^2+1} + x\sqrt{2}} = 0 \quad \text{Αρα οι } y = \frac{1}{x}\sqrt{2} \text{ είναι οι πλάγιες ασύμ-} \\ &\quad \text{πτωτες.} \end{aligned}$$

3. Για $a=0$ η $f(x) = \sqrt{-4x+1}$ με $D = (-\infty, \frac{1}{4})$. Είναι αυστηρώς φθίνουσα απ' το $+\infty$, στο 0, και η εφαπτομένη σ' αυτή στο $(\frac{1}{4}, 0)$ είναι // προς τον Oγ αφού $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{-4}{2\sqrt{-4x+1}} = -\infty$. Αρα η (C) είναι ένας κλάδος παραβολής στη διεύθυνση του Oγ. Είναι η παραβολή του Oγ, με κορυφή το $S(\frac{1}{4}, 0)$ που ορίζεται $\left. \begin{aligned} y &= -4x+1 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \right\}$

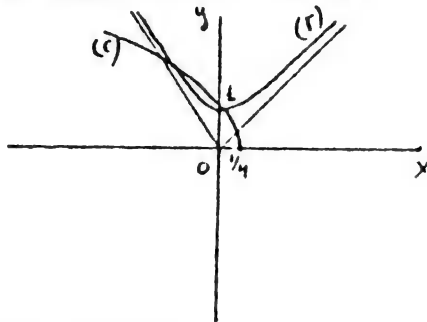
Τα κοινά σημεία δίνονται απ' τη λύση της εξίσωσης:

- 89 -

$$\sqrt{2x^2+1} = \sqrt{-4x+1} \Leftrightarrow 2x^2+1 = -4x+1 \Leftrightarrow 2x(x+2)=0$$

αι είναι τα $A(0,1)$ $B(-2,+3)$

η γραφικές παραστάσεις δίνονται απ' το σχήμα:



Έστω η $f(x) = \frac{x^2 + \mu x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

- α. Για βρεθούν οι τιμές για τις οποίες η f
 - δέχεται ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο
 - δέχεται μόνο ένα ελάχιστο
 - δεν δέχεται ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο
- β. Να μελετηθούν οι μεταβολές της συνάρτησης που προκύπτει για $\mu = -2$ και να γίνει η γραφική της παράσταση (C).
- γ. Να δειχτεί ότι η καμπύλη (C) είναι συμμετρική με άξονα συμμετρίας την ευθείαν (Δ) με εξίσωση $x=1$.
- δ. Να δειχτεί ότι η $f(x)$ (για $\mu = -2$) μπορεί να γραφεί:

$$f(x) = A + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{x-3} \quad (A, B, \Gamma \text{ να προσδιοριστούν}).$$

(Bacc. B, Lyon)

- 90 -

Λ Υ Σ Η

Το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι $D=R - \{-1, 3\}$ και
 είναι $f'(x) = -\frac{(\mu+2)x^2 + 8x + 3\mu - 2}{(x^2 - 2x - 3)^2}$

α.- Οι τιμές του μ για τις οποίες η $f(x)$ έχει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο, είναι οι τιμές για τις οποίες το τριώνυμο $\varphi(x) = (\mu+2)x^2 + 8x + 3\mu - 2$ με διακρίνουσα

$\Delta' = -(3\mu^2 + 4\mu - 20) = -(\mu-2)(3\mu+10)$, έχει δύο διακεκριμένες ρίζες που ανήκουν στο D . Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται για $-\frac{10}{3} < \mu < 2$

- Για να έχει η $f(x)$ μόνο ένα μέγιστο, πρέπει το τριώνυμο $\varphi(x)$ να ανάγεται σε πρωτοβάθμιο. Αυτό συμβαίνει για $\mu = -2$. Για τη τιμή αυτή του μ η συνάρτηση δέχεται ένα μέγιστο αφού $f'(x) = \frac{8(x-1)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$ μηδενίζεται περνώντας απ' τα θετικά στα αρνητικά.

- Για να μην έχει η $f(x)$ άκρες τιμές πρέπει $\Delta' \leq 0$
 δηλ. $\mu \leq -\frac{10}{3}$ ή $\mu \geq 2$

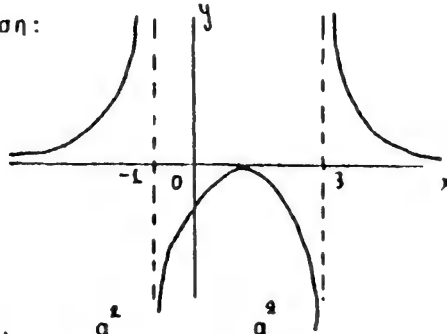
β. Για $\mu = 2$ η $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)(x-3)}$ και $f'(x) = \frac{-8(x-1)}{(x^2 - 2x - 3)^2}$

με πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	-1	1	3	$+$
$f'(x)$	$+$		$+$ 0 $-$		$-$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0 \searrow -\infty$	$-\infty \searrow +\infty$		1

- 91 -

Η γραφική παράσταση:



$$\gamma. \forall a \in \mathbb{D} : f(1-a) = \frac{a^2}{(2-a)(-2-a)} = \frac{a^2}{a^2-4}$$

$$f(1+a) = \frac{a^2}{(a+2)(a-2)} = \frac{a^2}{a^2-4} \quad \text{δηλ. } f(1-a) = f(1+a)$$

δηλ. η $x=1$ άξων συμμετρίας

$$\delta. x^2 - 2x + 1 = (x^2 - 2x - 3) + 4 = (x^2 - 2x - 3) - (x-3) + (x+1)$$

$$\text{άρα } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x^2 - 2x - 3) - (x-3) + (x+1)}{(x-3)(x+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3}$$

10.

θεωρούμε την $f_\mu(x)$ που ορίζεται απ' το τύπο:

$$f_\mu(x) = \frac{x^2 + (\mu - 2)x - 10}{x^2 - 2x - 3} \quad \mu \in \mathbb{R} \text{ και έστω } (C_\mu) \text{ η καμπύλη} \\ \text{της } f_\mu \text{ σε ορθ. σύστημα αξόνων}$$

1. α. Να βρεθούν οι τιμές του μ , για τις οποίες η f_μ είναι αύξουσα, σ' όλο το D , (σε κάθε διάστημα που ορίζεται).

β. Να βρεθούν οι τιμές του μ για τις οποίες η f_μ έχει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο.

γ. Να δείχτεί ότι όλες οι καμπύλες (C_μ) περνούν από ένα σταθερό σημείο A , του οποίου να βρεθούν οι συντεταγμένες.

2. Να προσδιοριστεί το μ , ώστε η εφαπτομένη στο A της (C_μ) να είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση

$$y = -\frac{20}{9}x. \text{ Είναι η τιμή } \mu = 2. \text{ Να παρασταθεί γραφικά η } (C_2)$$

3. Έστω B ένα σημείο του άξονα yOy με $\overline{OB} = \lambda$ και (δη παράλληλη προς τον XOX' που περνάει απ' το B).

Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η ευθεία (D) τέμνει την (C_2) σε δύο σημεία M' και M'' .

Σημειώνουμε με B' το σημείο της (D) τέτοιο ώστε

$$\frac{\overline{B'M'}}{\overline{B'M''}} = -\frac{\overline{BM'}}{\overline{BM''}}. \text{ Να υπολογιστούν συναρτήσεις του } \lambda \text{ οι}$$

$$\frac{\overline{B'M'}}{\overline{B'M''}}, \frac{\overline{BM'}}{\overline{BM''}}.$$

συντεταγμένες του B' . Να κατασκευαστεί στο ίδιο σύστημα με την C_2 η καμπύλη (Γ) που παριστά το σύνολο

-93-

των σημείων B', όταν το λ μεταβάλλεται.

(Bacc.D, Montpellier).

Λ Υ Σ Η

1. α. Το πεδίο ορισμού D της $f_{\mu}(x)$ είναι το $R - \{-1, +3\}$

$$\text{Στο D είναι } f_{\mu} = - \frac{\mu x^3 - 14x + 3\mu + 14}{(x^2 - 2x - 3)^2}$$

Αρα η f_{μ} είναι αύξουσα στο D αν και μόνο αν $\forall x \in D$:

$$\varphi(x) = \mu x^3 - 14x + 3\mu + 14 \leq 0 \text{ η οποία ανάγεται στις}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta' = 49 - \mu(3\mu + 14) \leq 0 \\ \mu < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -(3\mu^2 + 14\mu - 49) \leq 0 \\ \mu < 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -(\mu+7)(3\mu-7) \leq 0 \\ \mu < 0 \end{array} \right. \text{ τελικά } \mu \leq -7$$

$$\text{Για } \mu = -7 \text{ έχω } f_{\mu}(x) = \frac{x-10}{x-3}$$

β. Οι τιμές του μ , για τις οποίες έχω ένα μέγιστο κι ένα ελάχιστο είναι αυτές που είναι λύσεις της ανισότητας.

$$-(\mu+7)(3\mu-7) > 0 \quad \text{ή} \quad -7 < \mu < \frac{7}{3}$$

γ. Η μόνη τιμή του x , για την οποία η $f_{\mu}(x)$ παίρνει τιμή ανεξάρτητη του μ , είναι η $x=0$ για την οποία έχω

$$f_{\mu}(0) = \frac{10}{3} \quad \forall \mu \in R. \text{ Αρα όλες οι καμπύλες } (C_{\mu}) \text{ περνούν απ'}$$

το σημείο $A(0, \frac{10}{3})$.

$$2. \text{ Για } x=0 \text{ έχω } f'_{\mu}(0) = \frac{-3\mu+14}{9} \text{ άρα πρέπει } \frac{-3\mu+14}{9} = \frac{-20}{9} \Rightarrow \mu=2$$

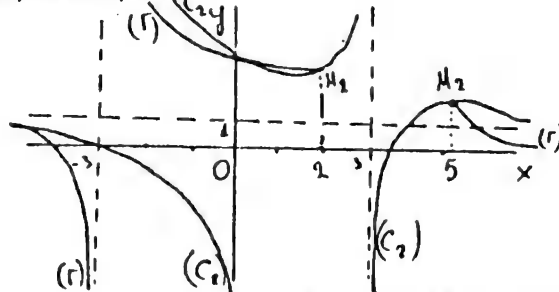
- 94 -

Η $f_2(x)$ έχει πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	-1	2	3	5	$+$
$f'_2(x)$		-		-0^+		$+0^-$
$f_2(x)$	$1 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow$	$2 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow 5/4$	$\searrow 1$

Η καμπύλη τέμνει τον Ox , στα $\pm \sqrt{10}$ και την οριζόντια ασύμπτωτη στο $(\frac{7}{2}, 1)$.

Η γραφική παράσταση είναι:



3. Οι τετμημένες χ' και χ'' των M' και M'' δίνονται απ' την εξίσωση $\frac{\chi^2 - 10}{\chi^2 - 2\chi - 3} = \lambda$ $(1) \Leftrightarrow (1-\lambda)\chi^2 + 2\lambda\chi + 3\lambda - 10 = 0$

Αυτή έχει λύση όταν $\lambda \geq \frac{5}{4}$ ή $\lambda \leq 2$

Για $\lambda = 2$ τα M' και M'' συμπίπτουν με το $M_1(2, 2)$ και για

$\lambda = \frac{5}{4}$, με το $M_2(5, \frac{5}{4})$.

Έστω μ', μ'' και B' οι ορθές προβολές των M', M'' και B'' πάνω στον Ox . Αν παρατηρήσουμε τη σχέση $\frac{B'M'}{B'M''} = -\frac{BM'}{BM''}$ παρα-

τηρούμε ότι η τετράδα (B, B', M', M'') είναι αρμονική. Αρα έχουμε

- 95 -

$\frac{2}{0\beta''} = \frac{1}{0\mu'} + \frac{1}{0\mu''}$ γιατί η η τετράδα $(0, \beta'', \mu', \mu'')$ παραμέ-
νει αρμονική. Αν συμβολίσουμε με x την τετμημένη του β'
έχω $\frac{2}{x} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x'x''} \Rightarrow x = \frac{2x'x''}{x' + x''}$

Όμως τα x', x'' είναι ρίζες της (1) άρα $x'x'' = \frac{3\lambda - 10}{1 - \lambda}$
και $x' + x'' = \frac{-2\lambda}{1 - \lambda}$ άρα για $\lambda \neq 0$ $x = \frac{10 - 3\lambda}{\lambda}$

Τελικά οι συντεταγμένες του β είναι $x = \frac{10 - 3\lambda}{\lambda}$ $y = \lambda$ ($\lambda \neq 0$)

Για $\lambda = 0$ το σημείο β είναι το μέσο του $\beta'\beta''$ του οποίου
τα άκρα β' και β'' είναι τα κοινά σημεία της (C_2) με τον Ox .

Το σύνολο των θέσεων των σημείων β .

Μεταξύ των συντεταγμένων του β διαπαλειφής του λ
παίρνω τη σχέση $x = \frac{10 - 3y}{y} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{10}{x + 3} \\ x \neq -3 \end{cases}$

Άρα το σύνολο των σημείων β είναι η υπερβολή (H) :

$y = \frac{10}{x + 3}$ Αυτή έχει ασυμπτώτους τις ευθείες $y = 0$ και $x = -3$

και περνάει απ' τα σημεία A , M_1 και M_2 . Αλλά επειδή ισχύ-
ουν οι συνθήκες ύπαρξης των M' και M'' το σύνολο (Γ) απο-
τελείται απ' το τμήμα της υπερβολής (H) για το οποίο τα x
δεν ανήκουν στο $(2, 5)$. Στο σχήμα το σύνολο (Γ) διακρίνεται.

11.

Δίδεται η $f(x) = \frac{ax+b}{2x+5}$ $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού E της συνάρτησης f
2. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των a και b , ώστε η συνάρτηση f να είναι σταθερή σε κάθε διάστημα του E .
3. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των a και b , ώστε η συνάρτηση $f'(x)$ (παράγωγος) να πληρεί την $f'(x) = \frac{3}{(2x+5)^2}$
4. Να μελετηθούν οι μεταβολές της f , όταν τα και b πληρούν τη σχέση του ερωτήματος 3.

(Classes de premiere A et B)

1. $E = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$ $\wedge \forall x \in E$

2. Η συνάρτηση είναι σταθερή στα $(-\infty, -\frac{5}{2})$ και $(-\frac{5}{2}, +\infty)$
 δηλ. σε κάθε διάστημα που περιέχεται στο E , αν υπάρχει ένας πραγματικός k έτσι ώστε $\chi \in E: \frac{ax+b}{2x+5} = k$ δηλ.

αν $a=2k$ και $b=5k$ δηλ. αν $\frac{a}{2} = \frac{b}{5}$ ή
 $5a-2b=0$

3. Η παράγωγος της f για οποιαδήποτε a και b είναι
 $f'(x) = \frac{5a-2b}{(2x+5)^2}$. Άρα η παίρνει τη δοθείσα μορφή
 αν $5a-2b=3$ (1).

4. Από τη σχέση (1) και το γεγονός ότι $b \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{3}{5}$

- 97 -

Έτσι έχω $f'(x) > 0 \quad \forall x \in E$. Άρα η f είναι αύξουσα στα $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}, +\infty)$. Στο $E - \{0\}$ η $f(x) = \frac{a}{2} + \frac{b}{x}$ ($b \neq 0$)

Όταν λοιπόν $x \rightarrow -\infty$ ή $+\infty$ το όριο της $f(x)$ είναι $\frac{a}{2}$ ενώ τα $\frac{b}{x}$ και $\frac{5}{x}$ είναι 0. Γελικά ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$\frac{a}{2}$	$+\infty$	$-\infty$

12.

Έστω η $f_m(x) = \frac{x^3}{(x-m)^2}$ όπου $m \in \mathbb{R}$. Επίσης έστω

(Cm) η καμπύλη της f_m σε ορθ. σύστημα αξόνων.

A. 1. Να μελετηθούν για τις διάφορες τιμές του m , οι μεταβολές, και η συμπεριφορά των συναρτήσεων $f_m(x)$ στα άκρα του πεδίου ορισμού τους. (Θεωρείστε $m < 0$, $m = 0$ και $m > 0$)

2. Να δειχτεί ότι για $\forall m \in \mathbb{R}^*$ η ευθεία με εξίσωση $y = x + 2m$ είναι ασύμπτωτη της (Cm)

3. Έστω M το σημείο της (Cm) του οποίου η τετμημένη x πληρεί την $f'_m(x) = 0$. Να μελετηθεί το σύνολο (E) των σημείων M , όταν το μεταβάλλεται. Να δοθεί η εξίσωση που παριστά τα σημεία M .

4. Να διεχτεί ότι για $m \in \mathbb{R}^*$ οι καμπύλες (Cm) και (C-m) είναι συμμετρικές ως προς την αρχή 0, των αξόνων.

- 93 -

5. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων τομής των (Cm) με τις ευθείες $y=x+2m$ και $y=x$

8. 1. Να χαρακτηί η (C₁) (καμπύλη της f₁).

2. Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, και δ έτσι ώστε $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad f_1(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1} + \frac{\delta}{(x-1)^2}$

3. Να βρεθεί το εμβαδόν του επιπέδου που αποτελείται απ' τα σημεία M(x και y) που πληρούν τις

$$2 < x < 1 + e \quad x+2 < y < f_1(x)$$

(Bacc.D, Amiens)

Λ Υ Σ Η

A. 1. Το πεδίο ορισμού της f_m είναι $D_{f_m} = \mathbb{R} - \{m\}$
 Αν $m=0$ τότε $D_0 = \mathbb{R}^*$ και η $f_0(x) = \frac{x}{x} = 1$. Τότε η C₀ είναι η ευθεία $y=x$ που περνάει απ' την αρχή των αξόνων. Τα 0 δεν ανήκουν την ευθεία εκτός αν ωρίσσουμε τη νέου $f_0(0)=0$

Για $m \neq 0 \quad f'_m(x) = \frac{x^3(x-3m)}{(x-m)^3}$ Αυτή μηδενίζεται για

$x=0$ και $x=3m$ ενώ για τις άλλες τιμές του m , έχει το πρόσημο του γινομένου $(x-3m)(x-m)$ παράγοντα που μας υποχρεώνει να θεωρήσουμε τις περιπτώσεις $m < 0$ και $m > 0$.

... Αν $m < 0$

$$f'_m(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3m \quad \text{ή} \quad x > m$$

$$\text{και } f'_m(x) < 0 \Leftrightarrow 3m < x < m$$

. Αν $m > 0$

- 99 -

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < m \quad \eta \quad x > 3m$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow m < x < 3m$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{αν } m < 0 \\ +\infty & \text{αν } m > 0 \end{cases}$

και αν γράψουμε $f(x) = \frac{x}{(1 - \frac{m}{x})^2}$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$x \rightarrow +\infty$$

Αρα οι μεταβολές των $f(x)$ δίδονται απ' τους παρακάτω πίνακες.

x	$-\infty$	$3m$	m	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{27m}{4}$	$\searrow -\infty$	$-\infty$	$\nearrow +\infty$

$$m > 0$$

x	$-\infty$	0	m	$3m$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\searrow -\infty$	$\nearrow \frac{27m}{4}$	$\searrow +\infty$

2. Θα μελετήσουμε το όριο $f(x) - (x+2m)$ όταν το $x \rightarrow +\infty$.

Είναι $f(x) - (x+2m) = \frac{x^3 - (x+2m)(x-m)^2}{(x-m)^3}$

$$= \frac{m(3x-2m)}{(x-m)^3} = m^3 \cdot \frac{3(x-m)+m}{(x-m)^3} = m^3 \left[\frac{3}{x-m} + \frac{m}{(x-m)^3} \right] \quad \text{άρα}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2m)] = 0$ άρα η $y = x+2m$ είναι ασύμπτωτος της C_m

- 100 -

3. Εκτός το 0, το μοναδικό σημείο M της C_m για το οποίο $f'_m(x)=0$ είναι το σημείο με συντεταγμένες $x_M = 2m$, $y_M = \frac{27m}{4}$ μεταξύ των οποίων υπάρχει η σχέση $y_M = \frac{9x_M}{4}$. Άρα το ζητούμενο σύνολο E είναι η ευθεία με εξίσωση $y = \frac{9x}{4}$ εκτός του 0 αφού $m \in \mathbb{R}^*$.

4. Έχουμε για $x \neq m$

$$f_{-m}(x) = \frac{x^3}{(x+m)^2} \quad \text{όρα } f_{-m}(-x) = -\frac{x^3}{(x-m)^2}$$
 αυτή η ιδιότητα δείχνει ότι οι (C_m) και (C_{-m}) είναι συμμετρικές ως προς 0.

5. Το ζητούμενα σημεία είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$f_m(x) - (x+2m) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2m = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2m}{3}$$

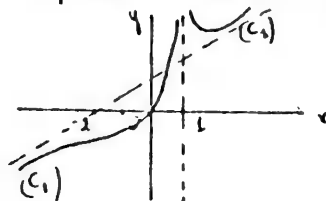
Η καμπύλη λοιπόν (C_m) και η ευθεία $y = x + 2m$ (πλάγια ασύμπτωτη της (C_m)) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το $(\frac{2m}{3}, \frac{8m}{3})$.

Τα κοινά σημεία της (C_m) και της $y = x$ δίνονται απ' τη λύση της $\frac{x^3}{(x-m)^2} = x \Leftrightarrow x [x^2 - (x-m)^2] = 0 \Leftrightarrow m x (2x-m) = 0 \Leftrightarrow$
 $x=0 \quad \text{ή} \quad x = \frac{m}{2}$

Τα κοινά σημεία λοιπόν είναι το 0 και το $(\frac{m}{2}, \frac{m}{2})$

B. 1.

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$f'_1(x)$		+	+	- 0	+
$f_1(x)$	$-\infty$	0	$\frac{27}{4}$	$+\infty$	



2. Απ' το ερώτημα A2 έχω την έκφραση για την $f_m(x) - (x+2m)$. Ορίζοντας

-101-

$$m=1 \quad \text{έχω } f_1(x) = (x+2) = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow f_1(x) = x+2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

μ είναι ο ζητούμενος τύπος για $a=1$ $\beta=2$ $\gamma=3$, $\delta=1$

3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} S &= \int_2^{1+e} [f_1(x) - (x+2)] dx = \int_2^{1+e} \left[\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \\ &= \left[3 \log(x-1) - \frac{1}{(x-1)} \right]_2^{1+e} = 4 - \frac{1}{e} \quad \text{τετραγωνικές μονάδες.} \end{aligned}$$

13.

Έστω F το σύνολο των συναρτήσεων με τύπο

$$f(x) = \frac{ax+\beta}{2x+3} \quad \text{όπου } a, \beta \in \mathbb{R}$$

1. Να δειχτεί ότι όλες οι f , και οι παράγωγοι τους έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού E .

2. Ονομάζουμε G το σύνολο των συναρτήσεων f , που είναι σταθερές σε κάθε διάστημα του E . Ποιά σχέση μεταξύ των a και β , χαρακτηρίζει τα στοιχεία του G

3. Να γίνει η γραφική παράσταση ενός στοιχείου του G .

(Classes de premiere A et B)

Λ Υ Σ Η

1. Το πεδίο ορισμού των $f(x)$ είναι $E = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$

-102-

Είναι $f'(x) = \frac{3a-2\beta}{(2x+3)^2}$, άρα το πεδίο ορισμού των $f'(x)$

είναι το \mathbb{R} .

2. Η συνάρτηση είναι σταθερή σε ένα διάστημα, αν η παράγωγος του είναι μηδέν, σ' αυτό. Δηλ. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3a-2\beta=0$

3. Μια συνάρτηση απ' το σύνολο G , χαρακτηρίζεται απ' την $\beta = \frac{3}{2}a$. Άρα η $f(x) = \frac{ax + \frac{3}{2}a}{2x+3} = \frac{a}{2} \frac{(2x+3)}{(2x+3)} = \frac{a}{2}$

Δηλ. η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία

$y = \frac{a}{2}$ εκτός του σημείου της με τετμημένη $x = -\frac{3}{2}$

14.

1. α. Να βρεθούν τα όρια όταν $x \rightarrow 0$ του $x \log|x|$ και του $x^2 \log|x|$

β. Ομοίως $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

γ. Ομοίως $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log|x|} - 1}{x}$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{x \log|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

Είναι συνεχής στο 0; Είναι παραγωγίσιμη στο 0;

Να γίνει η γραφική της παράσταση.

(Baccalauréat, C, Sud Viet-Nam)

Λ Υ Σ Η

1. α. Θέτω $x = \frac{1}{x}$ και ψάχνω το όριο του $x \rightarrow +\infty$

103-

ης παράστασης $\frac{1}{x} \log \left| \frac{1}{x} \right| = -\frac{1}{x} \log x$. Καθώς $\frac{\log x}{x} \rightarrow 0^+$

υμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log |x| = 0^-$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \log |x| = 0^+$

ή $x^2 \log |x| = x \cdot x \log |x|$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \log |x| = 0$

β. Το όριο αυτό, είναι εξ'ορισμού η παράγωγος στο $x=0$ που είναι το 1, για την $\frac{e^{x^2 \log |x|} - 1}{x}$

Έτω $x^2 \log |x| = k$ και θεωρούμε με την ιδιότητα

$$\frac{e^{x^2 \log |x|} - 1}{x} = \frac{e^k - 1}{\frac{k}{x}} = \frac{e^k - 1}{k} \cdot x \log |x|$$

Όταν το $x \rightarrow 0$ έχουμε απ' το α' ερώτημα ότι η $x \log |x|$ τείνει στο 0 με το πρόσημο του $-x$, και το k τείνει στο 0.

Αρα σύμφωνα με το προηγούμενο όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2 \log |x|} - 1}{x} = 0$ το πρόσημο του $-x$.

2. Όταν $x \rightarrow 0$ το $x^2 \log |x|$ τείνει το 0. Άρα $x^2 \log |x| = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Επίσης το όριο του $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{x^2 \log |x|} - 1}{x}$ όταν $x \rightarrow 0$

πρέπει και είναι 0. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και γαί $f'(0) = 0$.

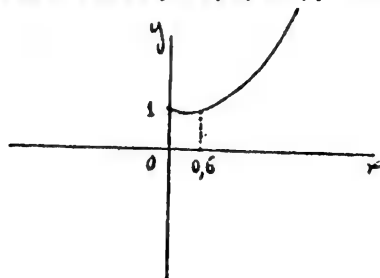
Για την γραφική της παράσταση είναι $f'(x) = x e^{x^2 \log |x|} (2 \log |x| + 1)$ που μηδενίζεται

$x_0 = e^{-1/2} \approx 0,6$. Ο πίνακας μεταβολών είναι ο ακόλουθος

x	0	0,6	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	+
$f(x)$	1	\rightarrow 0,8	$\rightarrow +\infty$

-104-

Η καμπύλη είναι κλάδος παραβολής στα θετικά του Ox .



15.

Έστω η $f(x) = (2x^3 - 3x)e^x$

1. Αν είναι γνωστό ότι $\frac{e^x}{x} \rightarrow \infty$ όταν $x \rightarrow \infty$ να βρεθεί το όριο του $\frac{e^x}{x^2}$ όταν $x \rightarrow \infty$. Να βρεθούν τα όρια xe^x και x^2e^x όταν $x \rightarrow -\infty$

2. Να γίνει η γραφική παράσταση (Γ) της συνάρτησης f
Να βρεθούν τα όρια της $f(x)$ όταν $x \rightarrow \pm \infty$

Ομοίως της $\frac{f(x)}{x}$ όταν $x \rightarrow +\infty$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση παίρνει μια μέγιστη τιμή στο διάστημα $(-\infty, 0]$

Να υπολογιστεί αυτό το μέγιστο.

3. Να βρεθεί μια αρχική F της συνάρτησης f

(Baccalauréat D, Bordeaux)

Λ Υ Σ Η

1. Όριο του $\frac{e^x}{x^2}$ Ότεω $x=2t$ κι έχω $\frac{e^x}{x^2} = \frac{e^{2t}}{4t^2}$

- 105 -

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{t} \right) = +\infty. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty. \text{ Θέτω } x = -t$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t e^{-t}) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

$$\text{αφού } \frac{e^t}{t} \rightarrow +\infty$$

$$\text{Όριο του } x^2 \cdot e^x \text{ θέτω } x = -2t$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} 4t^2 e^{-2t} = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right) = 0$$

2. Πεδο ορισμού είναι το $(-\infty, \infty)$. Είναι $f'(x) = (x-1)(2x+3)$
 e^x . Η $f(x)$ γράφεται : $f(x) = x^2 \left(2 - \frac{3}{x} \right) e^x$ Άρα

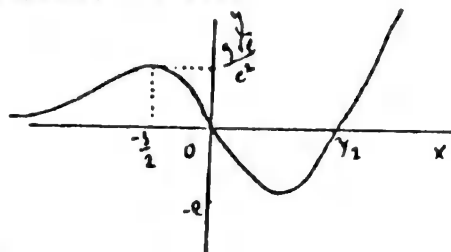
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad (\text{με τη βοήθεια του 1}) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{ομοίως})$$

Ο πίνακας μεταβολών λοιπόν είναι:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0 ↗	$9e^{-3/2}$	↘	$-e$ ↗	$+\infty$

Πλάγιες ασύμπτωτες δεν έχουμε αφού $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Η καμπύλη (Γ) είναι:



Για $x = -\frac{3}{2}$ έχουμε μέγισ-
 στη τιμή την $9e^{-3/2} = \frac{9\sqrt{e}}{e^2}$

3. Μια αρχική της f είναι $F = (2x^2 - 7x + 7)e^x + C$

16.

Έστω η συνάρτηση:

$f_{\mu}(x) = \mu(\mu-1)x^3 - \mu x^2 + x + 1$. $\mu \in \mathbb{R}$ Η καμπύλη που αντιστοιχεί στην f_{μ} θα συμβολίζεται με (C_{μ})

1. Να σχεδιαστούν οι καμπύλες C_0, C_1 και να προσδιοριστεί η τομή τους.

2. Να δειχτεί ότι οι καμπύλες (C_{μ}) έχουν ανά δύο ένα σημείο επαφής το οποίο να προσδιοριστεί.

3. Να γίνει η γραμμική παράσταση E της $q(x) = -\frac{x}{4}(x+1)^2 + (x+1)$

4. Να μελετηθεί η τομή της (C_{μ}) και της (E) . Να δειχτεί ότι, εκτός από μια εξαίρεση, οι καμπύλες (C_{μ}) εφάπτονται της (E) σ'ένα σημείο B_{μ} του οποίου να υπολογιστεί η τετμημένη συναρτήσεως του μ .

5. Να καθοριστούν οι συντεταγμένες των B_0 και B_1 .

(Classes de premières C.D.E)

Λ Υ Σ Η

1. Έχουμε $\forall x \in \mathbb{R} f_0(x) = x+1$. Η (C_0) λοιπόν είναι η ευθεία $y = x+1$. Επίσης $f_1(x) = -x^2 + x + 1$ $x \in \mathbb{R}$. Η (C_1) παραβολή με τα κοίλα κάτω. Οι τετμημένες των σημείων τομής τους δίδονται απ'τη λύση της $x+1 = -x^2 + x + 1$. Προκύπτει λοιπόν εύκολα ότι η (C_0) είναι εφαπτόμενη της (C_1) στο σημείο $A(0,1)$ και $(C_0) \cap (C_1) = \{A\}$

-107-

2. Σύμφωνα με τα προηγούμενα πρέπει να δείξουμε ότι κάθε καμπύλη (C_μ) περιέχει το A , και εφάπτεται της (C_0) στο σημείο αυτό. Τότε όλες ανά δύο θα εφάπτονται στο A . Πρέπει λοιπόν $f_\mu(0)=1=f_0(1)$ Αλλά αυτό ισχύει. Είναι $\psi \in \mathcal{M} \Rightarrow A \in (C_\mu)$ Επίσης έχουμε $f'_\mu(x) = 3\mu(\mu-1)x - 2\mu x + 1$ και $f'_\mu(0)=1=f'_0(0)$ δηλ. η (C_0) είναι εφαπτόμενη της (C_μ) στο A .

3. Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} g = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = -\infty$

Επίσης $g'(x) = -1(3x^2 + 4x - 3)$

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}$. Ο πίνακας μεταβολής της g

x	$-\infty$	$\frac{-2-\sqrt{13}}{3}$	$\frac{-2+\sqrt{13}}{3}$	$+\infty$	
g'	-	0	+	0	-
g	$+\infty$	$\searrow \frac{19-13}{54}$	$\nearrow \frac{19+13}{54}$	\searrow	$-\infty$

$H(E)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

4. Τα κοινά σημεία (οι τετμημένες τους) των (C_μ) και της (E) δίδονται απ'την εξίσωση:

$$-\frac{x}{4}(x+1)^2 + (x+1) = \mu x^2 [(\mu - 1)x - 1] + x + 1. \quad \text{γράφεται}$$

$$x [4\mu(\mu-1)x^2 - 4\mu x - (x+1)^2] = 0 \text{ ή τελικά}$$

$$x [(2\mu-1)x-1]^2 = 0 \quad \text{Οι λύσεις είναι}$$

$$x=0 \text{ και για } \mu \neq \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{2\mu-1}$$

Το σύνολο $(C_\mu) \cap (E)$ αποτελείται απ'τα σημεία $A(0,1)$

-103-

και για $\mu \neq \frac{1}{2}$ το σημείο $B_\mu \left(\frac{1}{2\mu-1}, f_\mu \left(\frac{1}{2\mu-1} \right) \right)$

$$\text{Εχουμε } g' \left(\frac{1}{2\mu-1} \right) = \frac{3\mu^2 - 5\mu + 1}{(2\mu-1)^2}$$

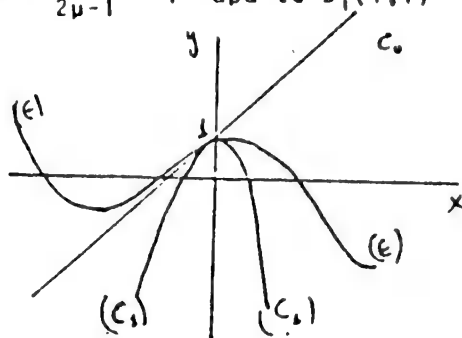
$$\text{Επίσης } f'_\mu \left(\frac{1}{2\mu-1} \right) = \frac{3\mu^2 - 5\mu + 1}{(2\mu-1)^2}$$

Άρα οι (C_μ) και $\eta(E)$ είναι
εφαπτόμενες στο B_μ .

Μόνο η καμπύλη $C_{\frac{1}{2}}$ κάνει εξαίρεση

5. Για $\mu=0$ το $\frac{1}{2\mu-1} = -1$ άρα $B_0 = (-1, 0)$

για $\mu=1$ $\frac{1}{2\mu-1} = 1$ άρα το $B_1(1, 1)$



17.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2}$

1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της.

2. Να χαρακτηί η καμπύλη της C

3. Από σημείο A της καμπύλης(C) με τετμημένη -1 έρουμε την ευθεία (D) με συντελεστή κατεύθυνσης μ. Ποιά είναι η εξίσωση αυτής της ευθείας; Διερευνήστε το πλήθος των κοινών σημείων των (C) και (D) για τις διάφορες τιμές του μ.

Αν $\mu = -1$ να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων τομής των δύο γραμμών. Τι παρατηρείτε;

(Partie du bacc.B, Centre d'Outre-mer)

Λ Υ Σ Η

1. Πεδίο ορισμού $D = \mathbb{R} - \{1\}$ Σ' αυτό είναι

$$f'(x) = -\frac{8x}{(x-1)^3} \text{ που μηδενίζεται για } x=0 \text{ και αλλάζει}$$

πρόσημο στο 0 και στο 1. Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

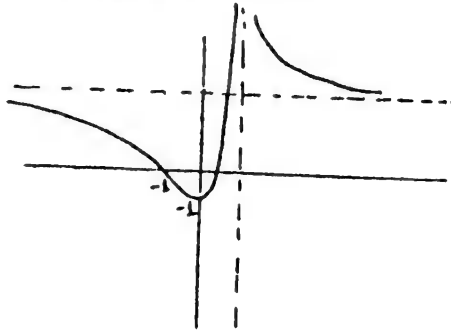
και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{2 - \frac{1}{x}}{(1 - \frac{1}{x})^2} = 3$ Άρα έχω τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$	$3 \searrow$	$-1 \nearrow$	$+\infty$	$+\infty \searrow 3$

Η καμπύλη (C) τέμνει τον $x'x$ στα Α και Β με τετμημένη -1 και $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα, και την οριζόντια ασύμπτωτότης $y=3$ στο σημείο με τετμημένη $x=\frac{1}{2}$ που είναι ρίζα της $\frac{3x^3 + 2x - 1}{(x-1)^2} = 3$. Το $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{9})$ σημείο καμπής.

- 110 -

Τελικά η καμπύλη (C) είναι η ακόλουθη:

Κατ. ασύμπτωτη: $x=1$ 3. Το $A=(-1,0)$ και η (D) : $y=\mu(x+1)$

Το ζητούμενο πλήθος των σημείων προκύπτει απ' τη λύση

$$\text{της: } \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2} = \mu(x+1) \Leftrightarrow 3x^2+2x-1-\mu(x+1)(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x-1)-\mu(x+1)(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[3x-1-\mu(x-1)^2]=0$$

με μία ρίζα $x=-1$ που δίνει το σημείο A και την

$$\mu(x-1)^2-3x+1=0 \Leftrightarrow \mu x^2-(2\mu+3)x+\mu+1=0$$

με διακρίνουσα $\Delta=(2\mu+3)^2-4\mu(\mu+1)=8\mu+9$ απ' όπου:για $\mu < -\frac{9}{8}$ δεν έχουμε λύσειςγια $\mu = -\frac{9}{8}$ μια διπλή λύση $x' = x'' = -\frac{1}{3}$ για $\mu > -\frac{9}{8}$ δύο λύσεις $x_1 = \frac{2\mu+3+\sqrt{8\mu+9}}{2\mu}$ $x_2 = \frac{2\mu+3-\sqrt{8\mu+9}}{2\mu}$

Τελικά το συμπέρασμα για τα κοινά σημεία είναι:

για $\mu < -\frac{9}{8}$ το μοναδικό κοινό σημείο το A.

-111-

για $\mu = -\frac{9}{8}$ έχουμε το A και το $(-\frac{1}{3}, -1)$ σημείο επαφής των (D) (C)

για $\mu > -\frac{9}{8}$ έχουμε τρία κοινά σημεία το A και τα M_1, M_2 με συντεταγμένες αντίστοιχα τις $(x_1, \mu(x_1+1))$ και $(x_2, \mu(x_2+1))$

Για $\mu = -1$ έχω $x_1 = -1$ και $x_2 = 0$, και το σημείο M_1 συμπίπτει με το A και συνεχώς η (D) εφάπτεται της (C) στο A. Το M_2 είναι σημείο της (C) το $(0, -1)$

18.

Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = x + 2 - \frac{1}{x+1} \quad \text{και} \quad g(x) = x + 2 + \frac{1}{x+1}$$

1. Γράψτε τον πίνακα μεταβολών των δύο συναρτήσεων.
2. Δείξτε ότι οι δύο συναρτήσεις έχουν για ασύμπτωτο την ευθεία $y = x + 2$
3. Ομοίως οι δύο συναρτήσεις (καμπύλες) έχουν το σημείο $(-1, 1)$ κέντρο συμμετρίας.
4. Να υπολογιστεί το σημείο της καμπύλης της $f(x)$ στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς την $y = 2x$

(Partie du Bacc. D. Montpellier).

-112-

Λ Υ Σ Η

$$1. \text{ Η } f: D_f = \mathbb{R} - \{-1\} \text{ με } f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in D_f$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \mp\infty$$

$$\text{Η } g: D_g = \mathbb{R} - \{-1\} \text{ με } g'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^\pm} g(x) = \mp\infty \quad \text{Οι πίνακες είναι}$$

x	$-\infty$	-1	∞
f'	$+$		$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	$-$	0
g	$-\infty \nearrow -1 \searrow -\infty$			$+\infty \searrow 3 \nearrow +\infty$	

2. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [g(x) - (x+2)] = 0 \quad \text{αφού } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

3. Αν γράψω τις συναρτήσεις σε νέο σύστημα αξόνων

ΧΟΨ με $x+1 = X$ τότε γίνονται:

$$y-1 = \psi: f_1(X) = X - \frac{1}{X} \quad g_1(X) = X + \frac{1}{X}$$

και είναι περιττές. Άρα οι καμπύλες τους έχουν την αρχή των αξόνων, που τώρα είναι το $(-1, 1)$ σαν κέντρο συμμετρίας.

4. Οι τετμημένες των ζητούμενων σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f'(x) = 2 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow$

$$(x+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } x = -2$$

Στο $x=0$, ενώ στο $x=-2$ το σημείο $B(-2, 1)$ και η εφαπτό-

-113-

μένη $y-1=2x$, ενώ στο $x=-2$ το σημείο $\beta(-2,1)$ και η εφαπτόμενη $y-1=2(x+2)$

19.

A.1 Να δείχτε ότι η ποσότητα $\sqrt{x^2-1} + x$ είναι θετική αν $x > 1$ και αρνητική αν $x < -1$

2. Να βρεθούν τα όρια των παραστάσεων:

$$\frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1} - x} \quad \text{όταν } x \rightarrow +\infty$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1} - x} \quad \text{όταν } x \rightarrow -\infty$$

Δείξτε ότι το $\frac{[\sqrt{x^2-1} + x] - 2x}{\sqrt{x^2-1} + x}$ τείνει στο 0 όταν $x \rightarrow -\infty$.

Να βρεθούν τα όρια της $\frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}}$ όταν $x \rightarrow \pm\infty$

B. Έστω η συνάρτηση $y = x + \sqrt{x^2-1}$

1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της (πεδίο ορισμού, μονοτονία, συμπεριφορά στα $\pm\infty$).

2. Να γίνει η γραφική της παράσταση (γ)

Να δείχτεί ότι δέχεται δύο ασυμπτώτους με εξισώσεις

$$y=0 \quad \text{και} \quad y=2x$$

3. Για κάθε σημείο $M(a,b)$ της (γ) ορίζουμε το συμμετρικό του $M_1(x_1, y_1)$ ως προς την αρχή των αξόνων.

Να χαρακτηρίσει η καμπύλη (γ_1) που είναι ο γ. τόπος των M_1 .

Να δείχτεί ότι η καμπύλη (Γ) που αποτελείται από την (γ) και την (γ_1), παριστάνει το σύνολο των σημείων που οι

-114-

συντεταγμένες τους πληρούν τη σχέση.

$$(y-x)^2 - x^2 + 1 = 0$$

(Bacc. Mathem Antilles et Guyane.)

Λ Υ Σ Η

A. 1. Η ποσότητα ορίζεται για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ εκτός των $-1 < x < 1$

Για $x > 1$ είναι άθροισμα θετικών ποσοτήτων άρα θετική. Για $x < -1$ θέτοντας $|x| = a$ γράφεται

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{1} - a \quad \text{ή} \quad \frac{\sqrt{a^2-1}}{1} - a \quad \text{ή} \quad \frac{(a^2-1) - a^2 - 1}{\sqrt{a^2-1} + a \sqrt{a^2-1} + a}$$

Ο παρανομαστής όντας θετικός το κλάσμα είναι αρνητικό.

2. Το πρώτο όριο είναι το $+\infty$ (απλό).

Το κλάσμα $\frac{\sqrt{x^2-1} - x}{x} = \frac{x \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - x}{x} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 1$ αφού $x > 1$.
 άρα το ζητούμενο όριο είναι το 2.

Για το τρίτο όριο έχουμε

$$\left[(\sqrt{x^2-1} + x) - 2x \right] = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{(x^2-1) - x^2 - 1}{\sqrt{x^2-1} + x \sqrt{x^2-1} + x} \quad \text{και αφού}$$

ο παρανομαστής τείνει στο $+\infty$, το κλάσμα τείνει στο 0.

Για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-1} + x)$ θέτοντας $|x| = a$ έχω

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (\sqrt{a^2-1} - a) = \text{απ' τα προηγούμενα} = 0.$$

$$a \rightarrow +\infty$$

- 115 -

Η $\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ αν $x \rightarrow +\infty$ γράφεται

$$1 + \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \rightarrow 2$$

Αντίστοιχα όταν $x \rightarrow -\infty$ η παράσταση $\rightarrow 0$.

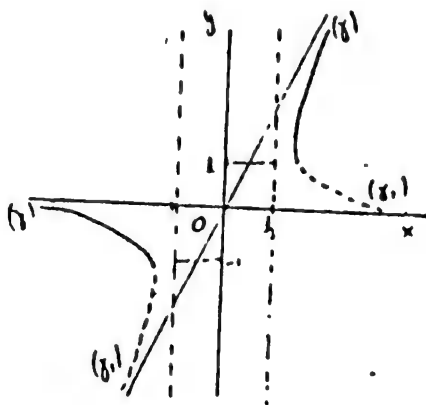
Β. Είναι $y' = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$ Απ' τα προηγούμενα έχουμε

ότι η παράγωγος είναι θετική για $x > 1$ και αρνητική για $x < -1$.

Ο πίνακας μεταβολών είναι:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	0	-	+	+
y	0	-1	1	$+\infty$

Η γραφική παράσταση:



Για τις ασυμπτώτους: η $y=0$ προφανώς. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2-1} - 2x] = 0$

απ την προηγούμενη μελέτη.

Αρα η $y=2x$ ασύμπτωτος.

3. Η καμπύλη (γ) και η συμμετρική της (γ') ως προς το 0, έχουν σχεδιαστεί στη γραφική παράσταση, με συνεχή και διακεκομένη γραμμή αντίστοιχα.

-116-

Αν $M(a, \beta)$ είναι ένα σημείο της (γ) τότε ισχύει $\beta = a \cdot \sqrt{a^2 - 1}$. Οι συντεταγμένες του M_1 είναι $x_1 = -a$ και $y_1 = -\beta$, και απ' την προηγούμενη σχέση, προκύπτει για τα x_1, y_1 :

$$-y_1 = -x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1} \quad \text{ή} \quad y_1 = x_1 - \sqrt{x_1^2 - 1}$$

Οι εξισώσεις λοιπόν των (γ) και (γ_1) είναι αντίστοιχα:

$$y = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{και} \quad y = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

Άρα η καμπύλη (Γ) που αποτελείται απ' το σύνολο των (γ) και (γ_1) είναι η (έχει εξίσωση):

$$(y - x - \sqrt{x^2 - 1})(y - x + \sqrt{x^2 - 1}) = 0 \quad \text{ή} \quad (y - x)^2 - (x^2 - 1) = 0 \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Α Λ Υ Τ Α Θ Ε Μ Α Τ Α

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - |x| - 2$

1. Ναδειχτεί ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
2. Να παρασταθεί γραφικά

(Classes de première A,D,C)

2. Δίνεται η $f(x) = \frac{-2x+1}{x+3}$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της
2. Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της και να χαραχτεί η γραφική της παράσταση.
3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της κομπύλης στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$

Bacc. A, Montpellier).

(Απάντηση 3ου: $y = -\frac{7}{9}x + \frac{1}{3}$)

3. Έστω οι συναρτήσεις $f_\mu(x) = \mu x^3 + x^2 + x - 4$ με $\mu \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το μ , για το οποίο η εξίσωση $f'_\mu(x) = 0$ έχει δύο αντίθετες ρίζες. Να μελετηθεί στη συνέχεια η $f_\mu(x)$, για τη τιμή του μ , που βρέθηκε, και να γίνει η γραφική της παράσταση.

(Classes de première C,D,E).

(Απάντηση: Έστω a και $-a$ οι αντίθετες ρίζες. Πρέπει $f(a) + f(-a) = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \dots \mu = -1$)

- 112 -

4. 1. Επαληθεύστε την ιδιότητα: $(x-1)^2(x+2) = x^3 - 3x + 2 \quad x \in \mathbb{R}$
 2. Έστω η συνάρτηση $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$. Μελετήστε τις μεταβολές της και χαράξτε τη γραφική της παράσταση (C)
 Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της (C) στο σημείο (0,2) και να χαρακτηί η εφαπτομένη αυτή.
 Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής της (C) και του άξονα $x'x$.

(Baccalaureat A, Limoges)

(Απάντηση: Εξ. εφαπτ. $y = -3x + 2$. Τέμνει τον $x'x$ στο $(-2, 0)$ και τον εφάπτεται στο $(1, 0)$).

5. Έστω η $f(x) = x \cdot e^x$

1. Να γίνει η γραφική της παράσταση (C) και να βρεθεί ο συντελεστής κατευθύνσεως της εφαπτομένης της στο $x=0$.

2. Έστω $g(x) = x \cdot e^{-x}$. Αν (C') είναι η καμπύλη της $g(x)$, τι σχέση έχει με την C;

(Bacc. A, Orleans-Tours)

(Απάντηση: Οι (C) και (C') είναι συμμετρικές ως προς το 0)

Για A' Δέσμη

6. Έστω η σχέση: $y^2 - x^2 + (\lambda + 1)x - \frac{\lambda}{4} = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$

1. Να εξετάσετε για τις διάφορες τιμές του λ το είδος των καμπύλων που παριστά η σχέση αυτή, σε ορθ. άξονες.

- 113 -

2. Να δοθούν οι συντεταγμένες των κέντρων συμμετρίας των καμπύλων σε κάθε περίπτωση, καθώς και οι εξισώσεις των ασυμπτώτων τους.

(Bacc. D et E, Dakar)

(Απάντηση: Αν $\lambda < 0$ παριστά υπέρβολή, αν $\lambda > 0$ έλλειψη.)

6. Έστω οι συναρτήσεις $f_{\mu}(x) = \frac{\mu x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

Συμβολίζουμε με (C_{μ}) τις καμπύλες την $f_{\mu}(x)$ σε ορθ. σύστημα.

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος $f'_{\mu}(x)$

2. Να μελετηθούν οι συναρτήσεις f_1 και f_0 και να δειχτεί ότι οι καμπύλες C_1 και C_0 εφάπτονται σ' ένα σημείο A το οποίο να καθοριστεί. Να παρασταθούν γραφικά οι δύο συναρτήσεις.

3. Να δείξετε ότι για οποιοδήποτε μ , η (C_{μ}) εφάπτεται στο A την C_1 .

4. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η C_2 σε σύστημα διαφορετικό απ' το προηγούμενο.

Να βρεθεί μια πλάγια ασύμπτωτα και ένα κέντρο συμμετρίας για την C_2 .

-120-

5. Όλες οι καμπύλες (C_μ) έχουν κέντρο συμμετρίας;

(Classes de premiere C,D,C)

(Απάντηση: 3. Όλες οι (C_μ) περιέχουν το $A(0,-1)$. Αφ'ετέρου

$$f'_1(0) = f'_\mu(0) = 1 \quad \text{οεδ}$$

5. Και το $S = (1, 2(\mu-1))$)

7. Έστω η $f(x) = \frac{(2x-7)(2x-1)}{4(x-|x-1|)}$

Απλοποιείτε τον τύπο της: (εξαγωγή απόλυτου)

Εξετάστε αν στο $x=1$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

~~να γίνει η γράφει~~

8. Έστω η $y = a\eta^2 x(1-\sin x)$

1. Να υπολογιστεί η y' (α σταθερά)

2. Να οριστεί η σταθερά a , απ'το γεγονός $y(\frac{\pi}{2}) = 2$

~~3. να γίνει η γράφει~~

~~να γίνει η γράφει~~

- 121 -

Έστω $y = f(x) = (1 - \frac{1}{x}) e^{\frac{1}{x}}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, και τα όρια της
άρτησης όταν $x \rightarrow \pm\infty$ και όταν $x \rightarrow 0$

Μελετήστε τη μονοτονία της

(Bacc. C, Dijon)

Απάντηση: Από το $(-\infty, 0)$ γν. φθ. και στο $(0, \infty)$ γν. αύξουσα).

Έστω $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

1. Να βρεθούν τα όρια της $f(x)$ στα άκρα του πεδίου ορισμού. ($\pm\infty$ - -1^{\pm}) Να μετασχηματιστεί η $f(x)$ στη μορφή $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x+1}$ και να προσδιοριστούν τα α , β , γ .

2. Έστω (Γ) η γραφική παράσταση της $f(x)$.
Δείξτε ότι η ευθεία (Δ) με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$,
που τα α , β είναι αυτά που βρέθηκαν στο 1.
είναι ασύμπτωτη της (Γ) . Να βρεθεί μια άλλη ασύμπτωτη
της (Γ) έστω η (Δ') . Να δείχτεί ότι το σημείο I , σημείο
μήκ των (Δ) και (Δ') είναι κέντρο συμμετρίας της (Γ)

H

(Bacc. B, LYON)

πάντ. $\alpha=1$ $\beta=-2$, $\gamma=2$ $I(-1, -3)$

1. $y = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x+1}$
Είναι η $y = x - 2 + \frac{2}{x+1}$

-121-

11. Δίνεται η συνάρτηση $y=3x-4x^3$

1. Να παρασταθεί γραφικά.

2. Τέμνουμε την (C) της προηγούμενης γραφικής παράστασης με μια ευθεία παράλληλη του Ox την $y=\lambda$. Για ποιά λ , απ' τα σημεία τομής που προκύπτουν υπάρχουν δύο τα M', M'' των οποίων οι τετμημένες x', x'' είναι θετικές; Βρήτε μια σχέση ανεξάρτητη του λ , ανάμεσα στα x', x'' .

3. Η ευθεία $M'M''$ τέμνει την (C) σε ένα σημείο M . Υπολογίστε την τετμημένη του M , συναρτήσει των x', x'' .

4. Αν είναι γνωστή η τετμημένη a , του μέσου A του τμήματος $M'M''$ να προσδιοριστούν τα x' και x'' . Να γίνει διερεύνηση. Να υπολογίστε το λ συναρτήσει του a .

5. Θέτω $x=\eta\mu t$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$). Δείξτε ότι $y=\eta\mu 3t$. Αν t' και t'' είναι οι τιμές του t , που αντιστοιχούν στις x' και x'' ($t' < t''$) να γράψετε τη σχέση υπάρχει ανάμεσα στα t' και t'' . Να προσδιοριστούν τα t', t'' ώστε το σημείο τομής της $y=\lambda$ με τον Oy είναι συζυγές του M' ως προς τα M και M'' .

6. Μια ευθεία $y=ax$, τέμνει την καμπύλη C , σ' ένα σημείο P με θετική τετμημένη. Να προσδιοριστεί το a , ώστε αυτή η ευθεία, να χωρίζει σε δύο ίσα μέρη, το εμβαδόν ανάμεσα στην καμπύλη και στον άξονα Ox .

(Institut Catholique d'Arts et Metiers)

12. 1. Να γίνει η γραφική παράσταση (C) της

-123-

$$y=x \frac{a+x}{a-x}$$

2. Μια ευθεία που περνάει απ' το $A(-a,0)$ σχηματίζει με τον Ox γωνία ω , έτσι ώστε $-\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ και τέμνει τον Oy στο σημείο P και την (C) στο M .

Να υπολογιστούν συναρτήσεις των a και ω , οι συντεταγμένες των M και P . Να συγκριθούν τα OP και PM . Να σχηματιστεί η εξίσωση του γ . τόπου των σημείων M συμμετρικών του M ως προς P . Να χαραχτεί ο γ . τόπος (C')

Η κάθετος στο M , στην ευθεία AP τέμνει τον Oy στο Q . Να υπολογιστεί το MQ

3. Τέμνουμε την καμπύλη (C) με την ευθεία $y=x \cdot \epsilon\phi\omega$ ($0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$). Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής M , συναρτήσεις του ϕ . Έτσι το σημείο M συνδέεται αφ' ενός με το ω και αφ' ετέρου με το ϕ . Να υπολογιστεί η ϕ συναρτήσει της ω .

Να υπολογιστεί η ϕ ώστε το τρίγωνο AOM να είναι ισοσκελές.

(Institut Catholique d'arts et metiers).

13. ✓ 1. Να προσδιοριστεί η αρχική $f(x)$ της $y=6x(2x^2-x-1)$ έτσι ώστε $f(-1)=2$. Να γίνει η γραφική της παράσταση C .

2. Εστω $Mo(x_0, y_0)$ σημείο της C . Να βρεθούν τα σημεία $M(x, y)$ της C στα οποία η καμπύλη να δέχεται εφαπτομένη παράλληλη προς την εφαπτομένη στο Mo . ✓

- 124 -

Σχηματίστε την εξίσωση που δίνει τις τετμημένες των σημείων M . Πως πρέπει να διαλέξουμε το x_0 , ώστε το πρόβλημα να έχει λύση; Για ένα τέτοιο x_0 , υπάρχουν δύο σημεία απ' τα M , τα M_1 , M_2 , διακεκριμένα ή όχι, με συντεταγμένες (x_1, y_1) , (x_2, y_2) αντίστοιχα. Υπολογίστε το x_1 όταν τα M_1 , M_2 ταυτίζονται. Πως πρέπει να διαλέξουμε το M_0 , ώστε τα M_1 , M_2 να ταυτίζονται με το M_0 ;

3. Να οριστούν τα α , β , συναρτήσεις του x_0 , ώστε η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ να περνάει απ' τα σημεία M_1 ή M_2 . Σχηματίστε τη τρίτοβάθμια εξίσωση που πρέπει να πληρεί το x_0 , ώστε η M_1 , M_2 να είναι εφαπτομένη της C , στο M_1 ή στο M_2 .

Ποιά είναι η τιμή του x_0 , ώστε η M_1 , M_2 να εφάπτεται της C στα διακεκριμένα σημεία M_1 και M_2 . Σχηματίστε σ' αυτή τη περίπτωση την εξίσωση της M_1 , M_2 .

(Bacc. économique, France métrop)

(Απάντηση: 1. $f(x) = x^2(3x^2 - 2x - 3)$ Σημεία καμπής

$$I_1 = \left(\frac{1 - \sqrt{7}}{6}, \frac{20\sqrt{7} - 71}{108} \right)$$

$$I_2 = \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{6}, \frac{-20\sqrt{7} + 7}{108} \right)$$

2. Εξίσωση τετμημένη των σημείων M : $2x^2 + (2x_0 - 1)x + 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0$.

Για να έχει λύση πρέπει $\frac{1 - 2\sqrt{7}}{6} \leq x_0 \leq \frac{1 + 2\sqrt{7}}{6}$

-125-

Όταν M_1, M_2 ταυτίζονται $x_1 = x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{6}$ (ταυτίζονται με το I_1).

$$3. \quad \alpha = \frac{1}{8} (24x_0^3 - 12x_0^2 + 2x_0 - 9)$$

$$\beta = -\frac{1}{8} (4x_0^3 - 16x_0^2 + 5x_0 + 7) \quad 72x_0^3 - 36x_0^2 - 50x_0 + 9 = 0$$

$$x_0 = \frac{1}{6} \quad M_1 \quad M_2 = \quad y = -\frac{10x}{9} - \frac{15}{7}$$

14. 1. Μελέτη και γραφική παράσταση C της $y = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$



2. Έστω (D) η ευθεία που περνάει απ' την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή κατευθύνσεως μ .

Να σχηματιστεί η εξίσωση που δίνει τις τετμημένες των κοινών σημείων των (C) και (D). Διερευνήστε το πλήθος των κοινών σημείων. Για ποιά μ , οι (C) και (D) εφάπτονται;

3. Έστω η εξίσωση $(x-1)\eta\mu^2 - 2(\kappa+1)\eta\mu + \kappa = 0$ όπου $t \in (0, 2\pi)$ και κ παράμετρος. Να εκφραστεί το κ , συναρτήσει του t . Στη συνέχεια να δείχτεί ότι συναρτήσει αυτού του κ , πορώ να βρώ το πλήθος των κοινών σημείων της (C) και μιας μεταβλητής ευθείας παραλλήλου προς τον OX. Να βρεθεί το κ , ώστε η εξίσωση ως προς t , να έχει δύο συμπληρωματικές λύσεις.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = a \frac{x^2 + 2x}{(x-1)}$. Ποιά είναι η παράγωγός της; Ποτέ αυτή μηδενίζεται; Η καμπύλη της y , η (Ca) τέμνει τον x' σε δύο σημεία.

-126-

Να προσδιοριστεί το a , ώστε οι εφαπτόμενες της a στα σημεία αυτά να είναι κάθετες.

(Bacc. écon France métrop)

(Απάντηση: 1. Ασύμπτ. $x=1$, $y=2$ Περνάει απ' τα $(0,0), (-2,0)$
2. Κοινά σημεία $\mu x^2 - (2\mu+1)x + (\mu-2) = 0$ Πλήθος:

$$\mu < -\frac{1}{12} \text{ κ.λ.π. , εφαπτόνται για } \mu = -\frac{1}{12} \text{ και } \mu = 2$$

$$3. \kappa = \frac{\eta\mu^2 t + 2\eta\mu t}{(\eta\mu t - 1)^2} \text{ αν } \eta\mu t = x \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2} = \kappa$$

Και επειδή η τυχούσα παράλληλη προς τον $x'x$ είναι $y=\kappa$,
για $\kappa < -\frac{1}{3}$ καμμία λύση $-\frac{1}{3} < \kappa < -\frac{1}{2}$ 4 λύσεις,
 $\kappa = -\frac{1}{3}$ διπλή λύση, $\kappa = -\frac{1}{2}$ δύο λύσεις $\kappa > -\frac{1}{2}$ δύο λύσεις.

Αν t_1, t_2 είναι συμπληρωματικές λύσεις $\eta\mu^2 t_1 + \eta\mu^2 t_2 = 1$
αν θέσω $\eta\mu t = x$ τότε ψάχνουν τις τιμές του κ για τις
οποίες $\eta(\kappa-1)x^2 - 2(\kappa+1)x + \kappa = 0$ έχει δύο λύσεις

με άθροισμα τετραγώνου 1. δηλ. $S^2 - \rho = 1 \Rightarrow \kappa^2 + 12\kappa + 3 = 0$

$\kappa' = -6 + \sqrt{33}$ $\kappa'' = -6 - \sqrt{33}$. Η κ'' απορίπτεται αφού
για $\kappa < -\frac{1}{3}$ δεν είχαμε λύση. Η πρώτη δεκτή.

4. $a = -\frac{3}{2}$)

Τ Ε Λ Ο Σ

$$\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma = \frac{\rho(\rho^3-3)}{1-3\rho^2} = -\varepsilon\varphi\omega$$

5 - ΦΕΒ. 1995

γ. Έχουμε τη σχέση: (μπορεί να αποδεχτεί):

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma-\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma}{1-(\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\beta \cdot \varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi\alpha)}$$

Επειδή $\alpha+\beta+\gamma=\omega+\pi$ έχω

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{3\varepsilon\varphi\omega+\varepsilon\varphi\omega}{1-S} \Rightarrow S = -3$$

3

Εστω η εξίσωση: $\varepsilon\varphi\chi - \varepsilon\varphi 3\chi = \mu \varepsilon\varphi 2\chi$

1. Να λυθεί για $\mu=0$ και $\mu=-1$

2. Ναδειχτεί ότι γενικά η εξίσωση αυτή αναλύεται στις δύο εξισώσεις: $\eta\mu 2\chi=0$ και $2\mu\sigma\upsilon\nu^2 2\chi + (\mu+2)\sigma\upsilon\nu 2\chi - \mu=0$.

3. Να λύσετε γραφικά την δεύτερη εξίσωση χρησιμοποιώντας την καμπύλη της $y = \frac{-2\chi}{2\chi^2 + \chi - 1}$

(Ecole d'électricité industrielle de Paris)

ΛΥΣΗ

1. για $\mu=0$ έχω $\varepsilon\varphi 3\chi = \varepsilon\varphi\chi$ $3\chi = \kappa\pi + \chi$ $\chi = \kappa\frac{\pi}{2}$

για $\mu=-1$ έχω $\varepsilon\varphi\chi - \varepsilon\varphi 3\chi = \varepsilon\varphi 2\chi$ ή $\varepsilon\varphi\chi + \varepsilon\varphi 2\chi = \varepsilon\varphi 3\chi$

με παραγοντοποίηση του πρώτου μέλους έχω:

$$\frac{\eta\mu 3\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu 2\chi} = \frac{\eta\mu 3\chi}{\sigma\upsilon\nu 3\chi} \quad \text{ή} \quad \eta\mu 3\chi(\sigma\upsilon\nu 3\chi - \sigma\upsilon\nu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\chi) = 0$$

η τελικά $\eta\mu\chi \cdot \eta\mu 2\chi \cdot \eta\mu 3\chi = 0$ απ'όπου με μηδενισμό

κάθε όρου έχω: $\chi = \kappa\pi$, $\chi = \kappa\frac{\pi}{2}$ $\chi = \kappa\frac{\pi}{3}$

2. Παραγοντοποιώντας το πρώτο μέλος της δοθείσας έχω

$$\frac{-\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu 3\chi} = \mu \frac{\eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu 2\chi} \quad \eta \quad (\mu \sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi)\eta\mu 2\chi = 0.$$

Αρα αυτή αναλύεται στις: (1) $\eta\mu 2\chi = 0$ και (2) $\mu\sigma\upsilon\nu\chi\sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$

Μετατρέποντας το $\sigma\upsilon\nu\chi.\sigma\upsilon\nu 3\chi$ σε άθροισμα έχω

$$\frac{\mu}{2} (\sigma\upsilon\nu 4\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi) + \sigma\upsilon\nu 2\chi = 0 \quad \eta$$

$$\mu [2\sigma\upsilon\nu^2 2\chi - 1 + \sigma\upsilon\nu 2\chi] + 2\sigma\upsilon\nu 2\chi = 0 \quad \text{δηλ.}$$

$$(3) \quad 2\mu\sigma\upsilon\nu^2 2\chi + (\mu + 2)\sigma\upsilon\nu 2\chi - \mu = 0$$

3. Για τη γραφική λύση της (3) θέτω $\sigma\upsilon\nu 2\chi = X$

$$\text{και έχω το σύστημα: } 2\mu X^2 + (\mu + 2)X - \mu = 0 \quad \text{που γράφεται}$$

$$-1 \leq X \leq 1 \quad \text{ισοδύναμα σε}$$

$$\frac{-2\chi}{2\chi^2 + \chi - 1} = \mu$$

$$-1 \leq \chi \leq 1$$

Κάτω απ' αυτή τη μορφή

(4) η γραφική λύση περιέχει

τα σημεία της καμπύλης $y = \frac{-2\chi}{2\chi^2 + \chi - 1}$ (ενδιαφέρουν οι

τετμημένες τους)

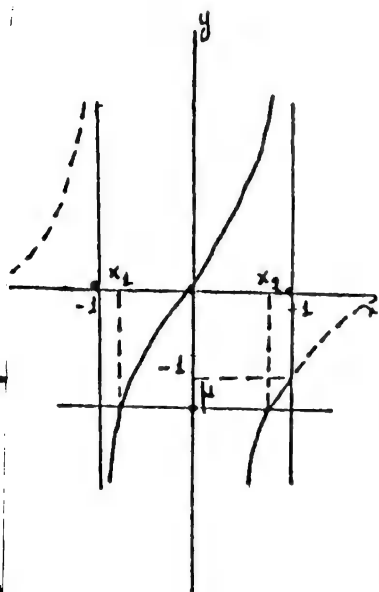
με $-1 \leq \chi \leq 1$ που συγχρόνως είναι σημεία της παράλληλης

προς τον $O\chi$, σε απόσταση μ . Απ' την ανάλυση, η γραφική

της πρώτης του (4) δίνεται από τρεις κλάδους, απ' τους

οποίους μας ενδιαφέρει αυτός με τετμημένες ανάμεσα στο -1 και 1 .

-33-



Απ' τη γραφική λύση φαίνεται ότι αν $\mu \leq -1$ έχουμε δύο λύσεις x_1, x_2

(για $\mu = -1$ έχω $x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{2}$).

Αν $\mu > -1$ έχουμε μια λύση.

Για να επανέλθουμε στην εξίσωση (3) ονομάζουμε ϕ_1 ($0 < \phi_1 < \pi$) το τόξο

ώστε $\sin \phi_1 = x_1$ και όταν $\mu \leq -1$

με ϕ_2 ($0 < \phi_2 < \frac{\pi}{2}$) ώστε $\sin \phi_2 = x_2$

Αν $\mu \leq -1$ η (3) αναλύεται στις

$\sin 2x = \sin \phi_1$ και $\sin 2x = \sin \phi_2$ με

λύσεις τις $x = \pm \frac{\phi_1}{2} + k\pi$ και

$x = \pm \frac{\phi_2}{2} + k\pi$

Για $\mu = -1$ έχουμε $\phi_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\phi_2 = 0$ και οι λύσεις είναι

$x = k\frac{\pi}{3}$ και $x = k\pi$.)

Αν $\mu > -1$ η (3) γίνεται $\sin 2x = \sin \phi_1$ και οι λύσεις

είναι $x = \pm \frac{\phi_1}{2} + k\pi$ (για $\mu = 0$, $x_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$).

4

1. Να δειχτεί ότι: $\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$.

2. Γενικά να δειχτεί ότι η παράσταση

$P = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin 2 \frac{\pi}{v} \cdot \dots \dots \dots \sin 2^{h-1} \frac{\pi}{v}$ ισούται με

$\pm \frac{1}{2^h}$ όταν $\mu, v, \in \mathbb{N}$

(Ecole superieure des sciences économiques)

-34-

Λ Υ Σ Η

$$1. \text{ Έχω } P = \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}$$

$$8P \sin \frac{\pi}{7} = (2 \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}) \cdot 4 \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{2\pi}{7} \cdot 4 \sin \frac{2\pi}{7} \cdot$$

$$\sin \frac{4\pi}{7} = (2 \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}) 2 \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{4\pi}{7} \cdot 2 \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{8\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}$$

$$\text{άρα } 8P = -1 \Rightarrow P = -\frac{1}{8}.$$

$$2. \text{ Γενικά πολ/ζω τα δύο μέλη της } \rho = \sin \frac{\pi}{v} \cdot \sin \frac{2\pi}{v} \cdot \sin 2^{u-1} \frac{\pi}{v}$$

$$\text{με τον όρο } 2^u P \cdot \sin \frac{\pi}{v} = 2^u \sin \frac{\pi}{v} \sin \frac{\pi}{v} \sin 2 \frac{\pi}{v} \dots \sin 2^{u-1} \frac{\pi}{v}.$$

Κάνοντας τις αναγωγές όπως προηγουμένως καταλήγουμε

$$\text{στην } 2^K P \sin \frac{\pi}{v} = \sin 2^u \frac{\pi}{v} \quad (1)$$

Εξετάζω τώρα, σε ποιές περιπτώσεις ισχύει η σχέση $\sin 2^K \frac{\pi}{v} = \pm \sin \frac{\pi}{v}$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

$$1. \quad 2^u \frac{\pi}{v} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{v} \quad 2^u = 2kv \pm 1 \text{ η οποία είναι αδύνατη}$$

στο σύνολο των φυσικών (το πρώτο μέλος άρτιο το β' περιττό)

$$2. \quad 2^u \frac{\pi}{v} = 2k\pi + \pi \pm \frac{\pi}{v} \quad 2^u \pm 1 = v(2k+1). \text{ Αυτή ισχύει}$$

για οποιοδήποτε μ , αρκεί να διαλέξουμε τον v διαιρέτη του $2^u \pm 1$. Δηλαδή απ την (1) έχω: $P = \pm \frac{1}{2^u}$

5

Δίνεται το πολυώνυμο

$$(1) \quad R = [x - \text{τουνα}] \left[x - \text{τουνα} \left(a + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \left[x - \text{τουνα} \left(a + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad \text{όταν}$$

τ και α είναι σταθερές ($\tau > 0$). 1. Να δείχτεί ότι το
R γράφεται στην μορφή (2) $R = x^3 + px + q$ και να εκφραστούν

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

-35-

τα ρ και q συναρτήσει των τ και α .

2. Αντίστροφα αν το R δίνεται με τη μορφή (2) να δεί-
ξετε ότι τα ρ και q , πρέπει να πληρούν μια σχέση, που
να καθορίσετε, για να τίθεται το R υπό μορφή (1).

3. Απ'τα προηγούμενα να βρεθούν οι ρίζες της
 $x^3 - 12x - 12 = 0$ υπολογίζοντας τα τ και α .

4: Το πολυώνυμο (1) μηδενίζεται για τρεις τιμές
 x_1, x_2, x_3 . Να βρεθεί ο χώρος στο επίπεδο $XO\Psi$ των σημείων
 $H(X, \Psi)$ όπου $X = \text{τουνα}$ $\Psi = \text{τημα}$, ώστε οι τρεις ρίζες x_1, x_2, x_3
να βρίσκονται ανάμεσα στο -1 και 1 .

(Bacc.D.Amiens)

$$1. R = x^3 - \tau \left[\text{συνα} + \text{συν}\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \text{συν}\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \right] x^2 + \tau^2 \left[\text{συνα} \cdot \text{συν}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \right. \\ \left. + \text{συν}\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \text{συν}\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) + \text{συνα} \cdot \text{συν}\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) \right] x - \tau^3 \text{συνα} \cdot \text{συν}\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{συν}\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Ο συντελεστής του x^2 όμως, η αγκύλη, ισούται με 0,
και ο συντελεστής -αγκύλη- του x με $-\frac{3}{4}$, ο δε συντελε-
στής του τ^3 ισούται με 1 $\text{συν} 3\alpha$

$$\text{Π.χ. } \text{συνα} \cdot \text{συν}\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \text{συν}\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{συν}\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \text{συν}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \cdot \text{συν}\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{συν} 3\alpha + \text{συν}\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + \text{συνα} + \text{συν}\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \right] = \frac{1}{2} \text{συν} 3\alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{Εχουμε λοιπόν } R &= x^3 - \frac{3\tau^2}{4}x - \frac{\tau^3}{4} \sin 3\alpha \quad \text{άρα} \\ \rho &= -\frac{3\tau^2}{4} \quad \eta \quad q = -\frac{\tau^3}{4} \sin 3\alpha \end{aligned}$$

2. Οι προηγούμενες σχέσεις αν αντιστραφούν θα δώσουν τα τ και α , συναρτήσεσι των ρ, q

$$\left. \begin{aligned} \text{Εχω } \tau &= -\frac{4\rho}{3} \\ \tau \sin 3\alpha &= -4q \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Η πρώτη έχει νόημα μόνο όταν } \rho < 0 \\ &\text{και δίνει } \tau = \sqrt{-\frac{4\rho}{3}} \end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση υπάρχει όταν

$$\left| -\frac{4q}{\tau^3} \right| \leq 1 \quad \text{ή} \quad \frac{16q^2}{\tau^6} \leq 1 \quad \text{ή} \quad 16q^2 \leq -\frac{64\rho^3}{27} \quad (\text{μέσω της } \tau = \sqrt{-\frac{4\rho}{3}}).$$

Άρα πρέπει $4\rho^3 + 27q^2 \leq 0$ (3) Αυτή είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να τεθεί το πολυώνυμο απ τη μορφή (2) στην (1). Αν πληρείται αυτή τότε τα τ και α δίνονται από τις (4) $\tau = \sqrt{-\frac{4\rho}{3}}$, $\sin 3\alpha = \frac{3\rho}{q} \sqrt{-\frac{3}{4\rho}} = \frac{3q}{2\rho} \sqrt{-\frac{3}{\rho}}$ με

$$0 \leq 3\alpha \leq \pi.$$

3. Εδώ $\rho = 12$ $q = -12$. Η συνθήκη (3) πληρείται και οι (4) δίνουν $\tau = \sqrt{16} = 4$ και $\sin 3\alpha = \frac{3}{2} \sqrt{1} = \frac{3}{2}$. Οι ρίζες x_1, x_2, x_3 είναι $x_1 = \tau \sin \alpha = 4 \sin \alpha$, $x_2 = 4 \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3})$, $x_3 = 4 \sin(\alpha + \frac{4\pi}{3})$.

Επειδή $\sin 3\alpha = \frac{3}{2}$ $\alpha \approx 13^\circ 50'$ (από πίνακες)

Ετσι κατά προσέγγιση υπολογίζω τις x_1, x_2, x_3 .

4. $x_1 = \tau \sin \alpha = X$
 $x_2 = \tau \sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{\tau}{2} (\sin \alpha + \sqrt{3} \eta \mu \alpha) = -\frac{1}{2} (X + \sqrt{3})$
 $x_3 = \tau \sin(\alpha + \frac{4\pi}{3}) = -\frac{\tau}{2} (\sin \alpha - \sqrt{3} \eta \mu \alpha) = -\frac{1}{2} (X - \sqrt{3})$

$$\text{δηλ. } -1 \leq X \leq 1, \quad -1 \leq -\frac{1}{2} (X + \sqrt{3}) \leq 1$$

$$-1 \leq -\frac{1}{2} (X - \sqrt{3}) \leq 1.$$

-37-

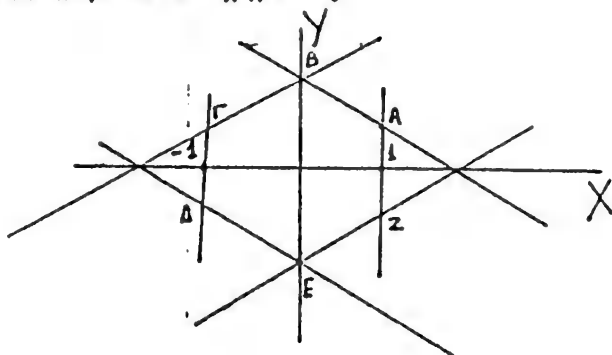
$$\text{Αρα } -1 \leq x \leq 1 \quad x + \psi\sqrt{3} - 2 \leq 0 \quad x + \psi\sqrt{3} + 2 \geq 0$$

$$x - \psi\sqrt{3} - 2 \leq 0 \quad x - \psi\sqrt{3} + 2 \geq 0.$$

Αν λοιπόν κατασκευάσουμε τις ευθείες με εξισώσεις

$$x = \pm 1 \quad x + \psi\sqrt{3} = \pm 2 \quad x - \psi\sqrt{3} = \pm 2$$

τα σημεία Μ βρίσκονται στο εσωτερικό του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ του παρακάτω σχήματος.



6

Να δείχτε ότι υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί x , που πληρούν τη σχέση $|\eta\mu 2x| = \frac{1}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Στη συνέχεια να υπολογιστούν τα ημίτονα και συνημίτονα των αριθμών αυτών.

(Classes de premiere C, P, E).

Λ Υ Σ Η

Η $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ γράφεται $\pi < 2x < 2\pi$. Θέτω $2x = \kappa$ και έχω την

$$|\eta\mu \kappa| = \frac{1}{3} \quad \text{με } \pi < \kappa < 2\pi. \text{ Οι ευθείες } y = \frac{1}{3} \quad \text{και } y = -\frac{1}{3}$$

τέμουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα Α, Β η πρώτη και στα Γ, Δ η δεύτερη. Τα τέσσερα αυτά σημεία είναι πέρα-
τα τόξων που πληρούν την $|\eta\mu\kappa| = \frac{1}{3}$, επειδή όμως πρέπει $\pi < \kappa < 2\pi$, τα μοναδικά σημεία είναι τα Γ και Δ, άρα υπάρχουν δύο αριθμοί που πληρούν τα δεδομένα.

Εστω $2\chi'$ και $2\chi''$ οι κυκλικές τετμημένες των σημείων Γ και Δ, που βρίσκονται στο $(\pi, 2\pi)$.

Πρέπει να υπολογίσουμε τα $\eta\mu\chi'$, $\sigma\upsilon\nu\chi'$, $\eta\mu\chi''$, $\sigma\upsilon\nu\chi''$:

Λόγω συμμετρίας στο σχήμα ισχύει

$$\frac{2\chi' + 2\chi''}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \chi' + \chi'' = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{δηλ. } \eta\mu\chi'' = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \chi'\right) = -\sigma\upsilon\nu\chi',$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi'' = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \chi'\right) = -\eta\mu\chi'.$$

Θα υπολογίσουμε λοιπόν τα $\eta\mu\chi'$, $\sigma\upsilon\nu\chi'$.

$$\text{Επειδή } 2\chi' \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu 2\chi' < 0 \quad \text{αλλά } \eta\mu 2\chi' = -\frac{1}{3}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\chi' = -\sqrt{1 - \eta\mu^2 2\chi'} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}. \text{ Επίσης } \sigma\upsilon\nu 2\chi' = 1 - 2\eta\mu^2 \chi'$$

$$\eta\mu\chi' = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \quad \left(\text{το } \chi' \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

$$\text{Το } \sigma\upsilon\nu\chi' = \frac{\eta\mu 2\chi'}{2\eta\mu\chi'} = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \quad \text{άρα } \eta\mu\chi'' = -\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi'' = -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{6}}.$$

7

Εστω $\epsilon\phi\chi = \frac{2\beta}{a-\gamma}$. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$y = a\sigma\upsilon\nu^2\chi + 2\beta\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma\eta\mu^2\chi$$

$$z = a\eta\mu^2\chi - 2\beta\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \gamma\sigma\upsilon\nu^2\chi.$$

Λ Υ Σ Η

Θα υπολογίσουμε τα $y+z$, και $y-z$

$$y+z = a(\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^2\chi) + \gamma(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi) = a + \gamma$$

$y-z = (a-\gamma)\sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\beta\eta\mu 2\chi$. Αυτή η τελευταία έκφραση μπορεί ακόμα να γραφεί:

$$y-z = (a-\gamma) \left[\sigma\upsilon\nu 2\chi + \frac{2\beta}{a-\gamma} \eta\mu 2\chi \right]$$

$$\begin{aligned} \eta \quad y-z &= (a-\gamma)(\sigma\upsilon\nu 2\chi + \epsilon\phi\chi\eta\mu 2\chi) = \\ &= (a-\gamma) \frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi \cdot \eta\mu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} \quad \eta \end{aligned}$$

$$y-z = (a-\gamma) \frac{\sigma\upsilon\nu(2\chi - \chi)}{\sigma\upsilon\nu\chi} = (a-\gamma) \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = a-\gamma$$

δηλ. τελικά $y+z = a+\gamma \Rightarrow y = a$

$$y-z = a-\gamma \Rightarrow z = \gamma$$

8

Δίδεται ορθογώνιο σύστημα αναφοράς xOy , και ένας κύκλος, κέντρου O και ακτίνας R . Εστω, πάνω στο κύκλο, ένα σημείο M που ορίζεται απ'τη γωνία $\alpha = (\angle x, OM)$.

Οι ορθές προβολές του M , πάνω στους Ox , και Oy είναι τα P και Q αντίστοιχα.

1. Να υπολογιστεί η γωνία α , ώστε $3\overline{OP} + 4\overline{OQ} = R$

2. Θεωρώ την ευθεία PQ . Αυτή τέμνει την εσωτερική διχοτόμο της γωνίας \widehat{XOM} , στο σημείο I . Να υπολογιστεί η α , ώστε $OI = \frac{R}{2}$. (ΟΓ η τετμημένη του I).

(Bacc. A, B Toulouse)

Λ Υ Σ Η

1. Είναι $\overline{OP} = R \sin \alpha$ $\overline{OQ} = R \eta \mu \alpha$ άρα η δοθείσα σχέση γράφεται $3 \sin \alpha + 4 \eta \mu \alpha = 1$ ή $\sin \alpha + \frac{4}{3} \eta \mu \alpha = \frac{1}{3}$ και θέτοντας $\epsilon \varphi \varphi = \frac{4}{3}$

($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) (απ' την οποία παίρνουμε $\sin \varphi = \frac{3}{5}$) έχω:

$$(\sin \alpha \cdot \sin \varphi + \eta \mu \alpha \cdot \eta \mu \varphi) = \frac{1}{3} \quad \sin \varphi = \frac{1}{5} \quad \text{δηλ.}$$

$$\sin(\alpha - \varphi) = \frac{1}{5} \quad \text{ή}$$

$$\sin(\alpha - \varphi) = \sin \theta \quad \text{όπου } \sin \theta = \frac{1}{5} \quad \text{και } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

άρα $\alpha - \varphi = \theta$ ή $\alpha = \alpha_0 = \varphi + \theta$ | περιορίζω τις τιμές
ή $\alpha - \varphi = -\theta$ ή $\alpha = \alpha_1 = \varphi - \theta$ | του α από $-\pi$ έως $+\pi$.

2. Η ευθεία PQ έχει εξίσωση : $\frac{x}{R \sin \alpha} + \frac{y}{R \eta \mu \alpha} = 1$

Και η διχοτόμος της \widehat{XOM} : $y = x \epsilon \varphi \frac{\alpha}{2}$.

Άρα η τετμημένη του κοινού τους σημείου I θα προκύπτει από την απαλοιφή του μεταξύ των δύο προηγούμενων εξισώσεων (λύση συστήματος):

$$\frac{x}{R \sin \alpha} + \frac{x \epsilon \varphi \frac{\alpha}{2}}{R \eta \mu \alpha} = 1 \quad \text{ή} \quad x \left[\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right] = R$$

$$\eta \quad x \left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} \right] = R \quad \eta \quad x = \frac{R(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu\alpha} \quad \text{Πρέπει}$$

$$\text{λοιπόν να ισχύει } \frac{R(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{R}{2} \quad \eta \quad 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \quad \eta$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \pm \sqrt{\frac{2}{2}} \quad \text{.Δηλ. οι πιθανές τιμές του } \alpha \text{ είναι}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} \quad \alpha = \frac{5\pi}{4} \quad \alpha = \frac{7\pi}{4} \quad \text{.Τα σημεία } M \text{ αντιστοιχούν στις}$$

κάρυφες ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο θ , με διαγωνίους τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι άξονες. -

9

Εστω A, B, Γ γωνίες τριγώνου:

$$1. \text{ Να δειχτεί η σχέση } \sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1$$

$$2. \text{ Αν ισχύουν: } \sigma\upsilon\nu A = \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta \quad \sigma\upsilon\nu B = \epsilon\phi\beta \epsilon\phi\gamma, \quad \sigma\upsilon\nu \Gamma = \epsilon\phi\gamma \cdot \epsilon\phi\alpha$$

να δειχτεί ότι: $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\gamma = 1$

(Concours général des Lycées et Collèges) .

Λ Υ Σ Η

$$1. \quad A+B+\Gamma=\pi \quad A+B=\pi-\gamma \quad \sigma\upsilon\nu(A+B)=-\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = \eta\mu A \eta\mu B \quad (\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma)^2 = (1-\sigma\upsilon\nu^2 A)(1-\sigma\upsilon\nu^2 B)$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1.$$

2. Η ρηπογούμενη σχέση, αν αντικοστήσω τις τιμές που δίνονται για τα $\sigma\upsilon\nu A, \sigma\upsilon\nu B, \sigma\upsilon\nu \Gamma$ γράφεται:

$$\frac{\eta\mu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta} + \frac{\eta\mu^2\beta \cdot \eta\mu^2\gamma}{\sigma\upsilon\nu^2\beta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\gamma} + \frac{\eta\mu^2\gamma \cdot \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha} + \frac{2\eta\mu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\beta \cdot \eta\mu^2\gamma}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\gamma} = 1$$

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών και μετατρέποντας όλους τους αριθμούς σε ημίτονα μετά την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει η ζητούμενη.

10

Δίδεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας r , και μια εφαπτόμενη ευθεία $χχ'$ στον κύκλο στο σημείο A . Έστω B , το αντιδιαμετρικό σημείο του A και M ένα σημείο του κύκλου, που ορίζεται απ' τη σχέση $\widehat{ABM} = \alpha$. Οι BM και OM τέμνουν την $χχ'$ αντίστοιχα στα K και I .

Να υπολογιστεί συναρτήσεαι του α και της $\varepsilon\varphi\alpha = t$ το μήκος των τμημάτων AK, AI, IK, OI για $\alpha > \frac{\pi}{4}$ και για $\alpha < \frac{\pi}{4}$.

Τι συμβαίνει όταν $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

(Bacc. 1^{ere} partie, séries A et C, Antilles et Guyane)

Λ Υ Σ Η

Το BOM τρίγωνο ισοσκελές, και η $\widehat{BOM} = \pi - 2\alpha$.

Αυτή η γωνία είναι λοιπόν αμβλεία όταν $\alpha < \frac{\pi}{4}$, ορθή αν $\alpha = \frac{\pi}{4}$ και οξεία όταν $\alpha > \frac{\pi}{4}$.

Και στις τρεις περιπτώσεις, το μήκος του AK είναι

$$AK = AB \varepsilon\varphi\alpha = 2Rt$$

Όταν $\alpha < \frac{\pi}{4}$ η $\widehat{AOI} = 2\alpha$. Τότε απ' το ορθογώνιο τρίγωνο OAI έχω $AI = OA \varepsilon\varphi 2\alpha = R \frac{2t}{1-t^2}$ και

$$OI = \frac{OA}{\sin 2\alpha} = R \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \text{Τελικά } KI = AI - AK =$$

$$= 2Rt \left[\frac{1}{1-t^2} - 1 \right] = \frac{2Rt^3}{1-t^2}$$

-43-

Στην περίπτωση που $\alpha = \frac{\pi}{4}$ το σημείο I δεν υπάρχει .

Αν $\alpha > \frac{\pi}{4}$ ή $\widehat{AOI} = \pi - 2\alpha$. Από το τρίγωνο AOI έχουμε

$$AI = AO \cos(\pi - 2\alpha) = -R \cos 2\alpha = \frac{2Rt}{t^2 - 1} \quad \text{και}$$

$$OI = \frac{OA}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{-R}{\sin 2\alpha} = R \frac{1 + t^2}{t^2 - 1}$$

$$\text{Επίσης } IK = AI + AK = 2Rt \left(\frac{1}{t^2 - 1} + 1 \right) = \frac{2Rt^3}{t^2 - 1}$$

11

Δίδεται ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2R$ και κέντρου O .
Εστω H μεταβλητό σημείο πάνω στο ημικύκλιο, και θέτουμε $(\widehat{BAM} = 2\chi)$. Εστω επίσης κύκλος κέντρου I , εσωτερικός του ημικυκλίου που εφάπτεται της AB στο H , του τόξου BM στο T και της AM στο N . Εστω τ η ακτίνα του αυτού του κύκλου.

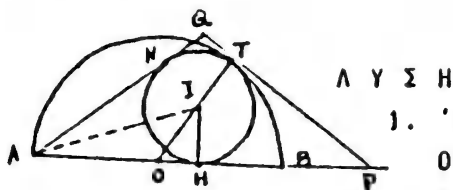
1. Να υπολογιστούν τα IH, OH, OI συναρτήσεις των AH, R και χ και να δειχτεί ότι $\tau = 2R \cos \chi (1 - \cos \chi)$
Ποιό είναι το μέγιστο του τ ;

2. Η εφαπτόμενη στο T του ημικυκλίου τέμνει την AB στο P και την AM στο Q . Αν η θετική κατεύθυνση είναι η απ' το A στο B να υπολογιστεί η $y = \widehat{AP}$ συναρτήσει του R και του $\cos \chi$.

3. Το τρίγωνο APQ μπορεί να γίνει ορθογώνιο;
Να υπολογιστούν οι πλευρές και οι γωνίες του τριγώνου APQ όταν $QA = QP$

4. Αν H είναι το μέσο του OB , να υπολογιστούν

(Ecole Supérieure de Céramique Industrielle de Sèvres)


$$OI = OT - IT = R - r = R - AH \sin \varphi$$

Το ορθογώνιο τρίγωνο OIH δίνει

ΟΙ¹ = OH + ΙΗ¹ δηλ. $(R - \tau)^2 = (AH - R)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\tau}{\epsilon \phi \chi} - R\right)^2 + \tau^2$. Μετά

τις πράξεις έχουμε $-2Rr = \frac{\tau^2}{\varepsilon\varphi^2\chi} - \frac{2Rr}{\varepsilon\varphi\chi}$ ή $\frac{\tau}{\varepsilon\varphi^2\chi} = 2R\left(\frac{1}{\varepsilon\varphi\chi} - \right)$

ή τελικά $\tau = 2R(1 - \epsilon\phi\chi)\epsilon\phi\chi$. Για το μέγιστο του, παρατηρώ
 ότι οι δύο όροι $1 - \epsilon\phi\chi, \epsilon\phi\chi$, του γινομένου έχουν σταθερό
 άθροισμα $= 1$. Άρα έχω μέγιστο όταν $1 - \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\chi$ $\epsilon\phi\chi = \frac{1}{2}$. Άρα
 το $\tau_{\max} = \frac{R}{2}$ και συμβαίνει όταν το H είναι στο 0.

2. Έχουμε $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 = \overline{PH}^2$

$$\delta\eta\lambda. \quad \overline{AP}(\overline{AP}-\overline{AB})=(\overline{AH}-\overline{AB})^2$$

ή $\overline{AP} = \frac{\overline{AH}^2}{2\overline{AH} - 2R}$. Επειδή $\overline{AH} = 2R(1 - \epsilon \phi \chi)$ έχουμε

$$y = \bar{AP} = \frac{4R^2(1-\varepsilon\varphi x)^2}{4R(1-\varepsilon\varphi x) - 2R} = 2R \frac{(1-\varepsilon\varphi x)^2}{1-2\varepsilon\varphi x}$$

3. Αν το $\Delta P Q$ είναι ορθογώνιο δεν μπορεί να είναι στο Q
θα έπρεπε τότε $O T / / O H$ οπότε $\widehat{O I A} = \widehat{I A M} = \chi$ δηλ. $O I = R$

Το σημείο I λοιπόν θα βρίσκονταν στο B και το τρίγωνο APQ δεν θα υπήρχε.

Αν το APQ είναι ισοσκελές και το H μέσον του AP, τότε : $AP=2AH = \frac{2\tau}{\epsilon\phi\chi}$ δηλ. $\frac{2R(1-\epsilon\phi\chi)^2}{1-2\epsilon\phi\chi} = 4R(1-\epsilon\phi\chi)$

Αν απορρίψουμε τη λύση $\epsilon\phi\chi=1$ δηλ. $\chi=\frac{\pi}{4}$ για την οποία το τρίγωνο APQ δεν υπάρχει, (το M βρίσκεται στο A) προκύπτει ότι $1-\epsilon\phi\chi=2(1-2\epsilon\phi\chi) \Rightarrow \epsilon\phi\chi = \frac{1}{3}$ ή $\chi \approx 18^\circ 26'$.

άρα $\hat{A}=\hat{P}=36^\circ 52'$ $\hat{Q}=106^\circ 16'$
Εχουμε επίσης $AP=2R \frac{(1-\frac{1}{3})^2}{\frac{2}{3}} = \frac{8R}{3}$

$$QA=QP \frac{AH}{\sin 2\chi} = \frac{4R}{3} \frac{4R}{\sin 2\chi} \frac{1+\epsilon\phi\chi}{1-\epsilon\phi\chi} = \frac{5R}{3}$$

4. Αν το H είναι μέσο του OP έχουμε $AH = \frac{3R}{2}$ ή $\tau = \frac{3R}{2} \epsilon\phi\chi$

Εχουμε λοιπόν την $\frac{3R}{2} \cdot \epsilon\phi\chi = 2R(1-\epsilon\phi\chi)\epsilon\phi\chi$ όπου απορρίπτοντας την $\epsilon\phi\chi \neq 0$, παίρνουμε την $\epsilon\phi\chi=1$ έχουμε $\tau = 2R(1-\frac{1}{2}) = \frac{3R}{2}$

$$\text{και } \overline{AP} = 2R \frac{(1-\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{9R}{4}$$

Ετσι να υπολογίσω μόνο την $\epsilon\phi P$. Υπολογίζω πρώτα την $\epsilon\phi \frac{P}{2}$.

$$\text{Είναι } \epsilon\phi = \frac{P}{2} = \frac{\tau}{\overline{HP}} = \frac{\tau}{\overline{AP}-\overline{AH}} = \frac{3R/2}{3R/4} = \frac{2}{3}$$

$$\text{αρα } \epsilon\phi P = \frac{2\epsilon\phi \frac{P}{2}}{1-\epsilon\phi \frac{P}{2}} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 4. \text{ Ομοίως έγω για τα ημίτονα}$$

$$\text{π.χ. } \eta\mu P = \frac{2\varepsilon\varphi \frac{P}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{P}{2}} = \frac{4}{5}$$

και απ το νόμο των ημιτόνων
βρίσκω τις άλλες πλευρές.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

1. Εστω ότι σε τρίγωνο ισχύει
 $2\epsilon\phi A = \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma \quad (0 < A < \frac{\pi}{2})$

Να δείχτεί ότι η προηγούμενη σχέση συνεπάγεται τις:
 $\epsilon\phi B \cdot \epsilon\phi \Gamma = 3$ και $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) = 2\sigma\upsilon\nu A$

(Sujet de concours école Breguet)

2. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 2\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot x + (2 - \sqrt{3})(1 - 4\eta\mu^2\varphi) = 0$$

όπου $0 < \varphi < 2\pi$.

1. Να μελετηθεί το πλήθος και το πρόσημο των ριζών.

2. Εστω η γωνία $\hat{xOy} = \frac{\pi}{6}$. Στη περίπτωση που οι ρίζες της εξίσωσης είναι θετικές, ονομάζουμε A και B, τα σημεία των Ox, Oy αντιστοίχα έτσι ώστε $OA = x'$ και $OB = x''$. Να υπολογιστεί το AB καθώς και η ακτίνα του περιγραφμένου κύκλου στο τρίγωνο AOB.

(Sujet de concours, école Breguet)

3. Εστω φ, ω είναι δύο γωνίες που πληρούν τις

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad h \in \mathbb{R}$$

$$\text{Θέτουμε το σύστημα } S: \begin{cases} 4\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\omega - 5(\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\omega) + 4 = 0 \\ \eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - (\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\omega) + \frac{1}{4h} + 1 = 0 \end{cases}$$

Να σχηματιστεί εξίσωση β' βαθμού που να δέχεται για ρίζες-τα $\eta\mu\varphi$ και $\sigma\upsilon\nu\omega$.

Να βρεθεί ο αριθμός των λύσεων του συστήματος και τα πρόσημά τους.

Μελετήστε ειδικά την περίπτωση όπου $h = -1$

(Bacc. tech. éco. France metrop.)

100%

4. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG=a$) και έστω $\hat{B}=\hat{\Gamma}=3\theta$. Στο εσωτερικό του τριγώνου, φέρνουμε από κάθε κορυφή δύο ημιευθείες, οι οποίες τριχοτομούν κάθε γωνία του. Μεταξύ των σημείων τομής των ημιευθειών αυτών σημειώνω τα A', B', Γ' , που είναι τα εξής:

$$A' \begin{cases} B\Gamma A' = \theta \\ \Gamma B A' = \theta \end{cases} \quad B' \begin{cases} A\Gamma B' = \theta \\ \Gamma A B' = \frac{\lambda}{3} \end{cases} \quad \Gamma' \begin{cases} A B \Gamma' = \theta \\ B A \Gamma' = \frac{\lambda}{3} \end{cases}$$

1. Έστω I το μέσο της $B\Gamma$. Να εκφραστούν συναρτήσει των a και θ τα μήκη AI και $A'I$. Απ' τις εκφράσεις που θα προκύψουν να δείχτεί: $AA' = 2a\eta\mu\theta$
2. Να δείχτεί: $AB' = AG' = \frac{a\eta\mu\theta}{\eta\mu(\frac{\pi}{3} - \theta)}$
3. Έστω H το μέσο του $B'\Gamma'$. Να υπολογιστούν συναρτήσει του θ οι λόγοι $\frac{HB'}{AB'}$, $\frac{HA'}{AB'}$. Απ' τις εκφράσεις που θα

προκύψουν να διεχτεί ότι ο λόγος $\frac{HA'}{HB'}$ έχει τιμή

ανεξάρτητη του θ , και ότι το $A'B'\Gamma'$ είναι ισόπλευρο
(Bacc.math. France mètre. et Alger).

5. Να λυθεί η εξίσωση: $\sin 3x = \eta\mu 2x$ (E). Να σημειωθούν στον τριγ. κύκλο οι λύσεις της (E). Ποιές είναι οι λύσεις της (E) στο $[-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$;

(Classes de premiere)

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Ι. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \frac{2x-7}{x^2-2x-3}$. Ονομάζουμε C , την καμπύλη της F .

α. Να μελετηθούν οι μεταβολές της F , και να προσδιοριστούν οι ασύμπτωτες. Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης Δ , της C , στο σημείο με τετμημένη 1. Χαράξτε τις C και Δ .

β. Να προσδιοριστούν τα α και $\beta \in \mathbb{R}$:

$F(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$. Να υπολογιστεί η αρχική ή $\Sigma(x)$ της F , στο διάστημα $(3, +\infty)$. Ομοίως το $\text{LIM}_{x \rightarrow 3} F(x)$. Υπολογίστε το εμβαδόν του τμήματος που περιέχεται στις ευθείες: $\psi=0$, $x=7/2$, $x=5$

γ. Έστω η $G(x) = \frac{dx-7}{x^2-2x-3}$

Δείξτε ότι η G είναι άρτια. Χρησιμοποιώντας την C χαράξτε την καμπύλη Γ , της G .

δ. Θεωρούμε την ευθεία $D_\mu = \mu/(2(2x-7))$. Να βρεθεί το πλήθος των κοινών σημείων της C και της D_μ , για τα διάφορα μ .

ε. Έστω M , κινητό σημείο στο επίπεδο, που οι συντεταγμένες του, συναρτήσει του χρόνου, είναι $x=3+e^t$ $\psi = -\frac{2-e^{-t}}{4+e^t}$. Δείξτε ότι η τροχιά του M , είναι τμήμα της C . Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος της ταχύτητας του M , κατά τη χρονική στιγμή t .

(BACC/ SERIE MATHÉMATIQUES ALGÉRIEN)

2. Δίνεται η $F(x) = x + \sqrt{x^2+x+1}$

α. Να δείχτε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα. Μελετήστε τις μεταβολές της και χαράξτε την αντίστοιχη καμπύλη C_F .

Δείξτε ότι η C_F δέχεται δύο ασύμπτωτες τις $\psi = -1/2$ και $\psi = 2\chi + 1/2$

β. Έστω C' η συμμετρική καμπύλη της C_F , με άξονα συμμετρίας την ευθεία $\psi = \chi$. Κατασκευάστε την C' και δείξτε ότι η C' παριστάνει μια συνάρτηση $F_1(\chi) = -\frac{\chi^2 - 1}{2\chi + 1}$.

γ. Να προσδιορίσετε τα α, β, γ ώστε να ισχύει $\frac{\chi^2 - 1}{2\chi + 1} = \alpha\chi + \beta + \frac{\gamma}{2\chi + 1}$

δ. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_1^{\sqrt{5}} -\frac{\chi^2 - 1}{2\chi + 1} d\chi$

ε. Να βρεθεί το εμβαδόν του τμήματος που περιέχεται $0 \leq \chi \leq 1$ και $F(\chi) \leq \psi \leq F(1)$

Β. Έστω $G(\chi) = \ell \eta^r(\chi)$

α. Μεταβολές και καμπύλη C_G της $G(\chi)$. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_G στο σημείο με τετμημένη 0. (μηδέν)

β. Δείξτε ότι η G είναι " I-I και επί " του $(-1, \infty)$ στο R . Να βρεθεί η G^{-1}

γ. Έστω (a_n) η ακολουθία που ορίζεται:

$a_0 = 1, a_{n+1} = G(a_n) + 1$ Δείξτε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη άνω απ' το 3, να εξαχθεί ότι είναι και συγκλίνουσα.

δ. Έστω (u_n) η ακολουθία:

$u_n = \int_1^{a_n} (G(t) - \ell \eta(t)) dt$. Για $t > 0$, και γράφοντας $G(t) - \ell \eta(t) = \ell \eta(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}})$ δείξτε ότι η συνάρτηση $G(t) - \ell \eta(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ε. Να εξαχθεί ότι η (u_n) συγκλίνει, σε πραγματικό αριθμό, ο οποίος να προσδιοριστεί.

3. Έστω η $F(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$

α. Μελέτη της F , γραφική της παράσταση, εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0 = 1$

β. Δείξτε ότι η καμπύλη C της F , και η συμμετρική της ως προς τον $χχ'$, αποτελούν μια παραβολή, της οποίας να βρεθούν η κορυφή, η εστία και η διευθετούσα.

γ. Να δείχτε ότι η καμπύλη C , δέχεται σε κάθε σημείο της M , μία εφαπτομένη. Αυτή τέμνει τον Ox σ'ένα σημείο T . Έστω H η ορθή προβολή του M πάνω στον Ox . Ονομάζουμε S , το σημείο $(1,0)$. Να δείχτε ότι το S είναι το μέσο του HT . Να εστιάθει μια απλή καταστροφή της εφαπτομένης της C , στο τυχόν σημείο της.

δ. Υπολογίστε μια αρχική της F , στο $(-\infty, 1]$ ή α βρεθεί το εμβαδόν του τμήματος που περικλείεται: $0 \leq x \leq 1$

$$-F(x) \leq \psi \leq F(x)$$

Β. Δίνεται η ακολουθία $a_n: a_0 \in \mathbb{R}$ και $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-a_n}{2}}$

Ια. Να δείχτε ότι η (a_n) υπάρχει, αν και μόνο αν το $a_0 \in [-1, 1]$. Υπολογίστε το a_0 ώστε η (a_n) , να είναι σταθερή.

2. Θεωρούμε $a_0 = \eta \mu \varphi_0$ με $\varphi_0 \in [-\pi/2, +\pi/2]$

α. Δικαιολογήστε αυτή την εκλογή. Τι συμβαίνει όταν $\varphi_0 = \pi/6$;

Αφού δείχτε η σχέση $\sqrt{\frac{1-\eta \mu \alpha}{2}} = \eta \mu(\pi/4 - \alpha/2)$ να εξακριβωθεί ότι υπάρχει μοναδικό $\varphi_n \in [-\pi/2, \pi/2]$ τέτοιο ώστε $a_n = \eta \mu \varphi_n$. Ποιά σχέση υπάρχει μεταξύ των φ_{n+1} και φ_n ;

β. Θεωρούμε την ακολουθία $(\beta_n): \beta_n = \varphi_n - \pi/6$. Να δείχτε ότι είναι μια γεωμ. πρόοδος.

(SOLVE C LA REVISION)

I		<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</u>
1.	Εκτης τάξης ρίζες της μονάδας, του 8i, Σελ. υπολογισμός του συνπ/12 ημιπ/12.....	...I
2.	Υπολογισμός, με μαθηματική επαγωγή αθροισμάτων όπως $1+2i+3i^2+\dots+ni^{n-1}$	2
3.	Επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης στο C, απεικόνιση των ριζών της στο μιγ. επίπ.	3
4.	Ρίζες του $-1-4\sqrt{3}i$. Λύση της $z^2-iz-\sqrt{3}i=0$ Υπολογισμός των z'/z'' , z/z''	55
5.	Η απεικόνιση $T(z)=-\frac{iz-1}{2z-i}+\frac{2i}{2z-i}$. $T^{-1}=T$	6
6.	Υπολογισμός των z_0^2 , z_0^3 . Επίλυση δύο δευτεροβαθμίων στο C.....	6
7.	Η ακολουθία στο C: $z_{n+1}^4=z_n$. Η $u_n= z_n $ είναι γεωμ. πρόοδος.....	7
8.	Η απεικόνιση $F(z)=z^2-2iz-1+i$. Αμετάβλητα σημεία, γεωμετρικά ζητούμενα.....	8
9.	Επίλυση της $z^3-(1-5i)z^2-2(5+i)z+8i=0$. Επί- λυσή της, οι ρίζες της γεωμ. πρόοδος.....	10
10.	Το $F(z)=z^3+7iz^2-z-7i$. Οι εικόνες των ριζών του στο μιγαδ. επίπ.....	11
11.	Η $F(z)=-\frac{2iz-5}{z-2i}$. Εικόνα μέσω της F, κύκλου, σταθερά σημεία, αντίστροφη.....	12
12.	Συνθήκη ώστε ο $z^2/z+i$ φανταστικός. Οι εικόνες των λύσεων της $z^2+2iaz-2a=0$	13
13.	$1+i+2\sqrt{2}e^{i\lambda}=\chi_\lambda+i\psi_\lambda$, υπολογισμός των χ_λ , ψ_λ , γεωμετρική εικόνα τους λύση εξίσωσης.....	14
14.	Οι πέμπτης τάξης ρίζες της μονάδας και η γεωμετρική κατασκευή καν. πενταγώνου...	16
15.	Εία εξίσωση στο C, 4ου βαθμού. Οι ρίζες της, έχουν εικόνες παρ/μο. Υπολογισμός πολυωνύμου με ρίζες συμμετρικά σημεία των κορυφών του αρχικού ως προς την $\varphi=\chi$	18

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ- ΑΡΙΘΜΟΙ.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Να υπολογιστούν στο σύνολο \mathbb{C} οι έκτης τάξης ρίζες τη, μονάδας, σε τριγωνομετρική και αλγεβρική μορφή.
2. Να υπολογιστεί το $(1-i)^6$. Να υπολογιστούν οι έκτης τάξης ρίζες του 8i.
3. Απ' το δεύτερο ερώτημα να υπολογιστούν τα $\cos \frac{\pi}{12}$ και $\sin \frac{\pi}{12}$

(BACC/ C. AMIENS)

ΛΥΣΗ

$$1. \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_4 = -x_1 = -1, \quad x_5 = -x_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_6 = -x_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2. \text{ Έχουμε } (1-i)^6 = 1+6(-i)+15(-i)^2+20(-i)^3+15(-i)^4+6(-i)^5+(-i)^6 = 1-6i-15+20i+15-6i-1 = 8i$$

Υπάρχουν 6 ρίζες έυτης τάξης του $8i$. Αν u είναι μία απ' αυτές, οι έξο αριθμοί είναι $u \times \chi_k$ γι $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, όπου οι χ_k είναι οι έυτης τάξης ρίζες της μονάδας.

$$\text{Άρα } u_1 = 1-i \quad u_2 = (1-i)\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

$$u_3 = (1-i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i \quad u_4 = -u_1 = i-1$$

$$u_5 = -u_2 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \quad u_6 = -u_3 = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

3. Ο αριθμός $8i$ έχει μέτρο 8 και όρισμα $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Οι έυτης τάξης ρίζες του έχουν μέτρο $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$ και ορίσματα $\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{6}$. Μία απ' αυτές γράφεται: $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. (παραβλ $0 < \eta\beta\frac{\pi}{12} < \omega\eta\frac{\pi}{12}$ αυτί η ρίζα είναι η u_1).

$$\text{Άρα προκύπτει: } \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

$$\text{και } \eta\beta\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

2 α. Να δείχτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$1+2i+3i^2+\dots+ni^{n-1} = \frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2}$$

β. Ομοίως: $1-3+5-7+\dots+(2n+1)(-1)^n = \frac{(n+1)(-1)^{n+1} - 1 - (2n+1)(-1)^n}{2}$
και $2-4+6-\dots-2n(-1)^{n-1} = \frac{1 - (2n+1)(-1)^n}{2}$

(BACC. C. STRASBOURG)

ΛΥΣΗ.

α. Για $n=1$ γίνεται $1 = \frac{-2i^2 - i + i}{2}$ που ισχύει.

Υποθέτω ότι ισχύει η $S_{n-1} = 1 + 2i + 3i^2 + \dots + (n-1)i^{n-2} = \frac{-ni^n - (n-1)i^{n-1} + i}{2}$

Αν ονομάσω S_n την ζητούμενη σχέση τότε:

$$S_n = S_{n-1} + ni^{n-1} = \frac{-ni^n - (n-1)i^{n-1} + i}{2}$$

Η κώσης $-(n+1)i^{n+1} = -(n+1)i^{n-1} \cdot i^2 = (n+1)i^{n-1}$ δείχνει ότι

$$S_n = \frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2}$$

β. Αν $n=2k+1$ εξισώνοντας τα πραγματικά μέρη των δύο μελών παρατηρώντας ότι $i^{n-1} = i^{2k} = (-1)^k$ $i = i^{2k+1} = (-1)^k \cdot i$ και $i^{n+1} = (i^2)^{k+1} = -(-1)^k$ έχουμε: (αφ' ου α')

$$1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (2k+1)(-1)^k = \frac{(2k+2)(-1)^k}{2} = (k+1)(-1)^k.$$

Ομοίως αν $n=2k$, εξισώνοντας τα φανταστικά μέρη των δύο μελών ως α. και λαμβάνοντας υπ όψη ότι:

$$i^{n-1} = i^{2k-1} = i(-1)^{k-1}, \quad i^n = (-1)^k \quad \text{και} \quad i^{n+1} = i^{2k+1} = (-1)^k \cdot i \quad \text{έχουμε}$$

$$2 - 4 + 6 - \dots - 2k(-1)^{k-1} = \frac{-(2k+1)(-1)^k + 1}{2} \quad \text{ο.ρ.β.}$$

3. Έστω α , μιγαδικός αριθμός όχι μηδέν, και (E) η εξίσωση στο \mathbb{C} , με άγνωστο τον z :

$$(E): 2z^2 - \alpha(7+i\sqrt{3})z + 2\alpha^2(3+i\sqrt{3}) = 0.$$

Ι. Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες της (E) για $\alpha = \frac{1}{2} + i\sqrt{3}/2$

ΜΙΧΑΗΛ ΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΦΟΙΤΗΤΗΣ Μ.Π.Ι.

2. Να υπολογιστούν οι ρίζες z_1 , και z_2 της (E)

3. Να δείχτεί ότι $z_2 - a = U(z_1 - a)$. Να κατασκευαστεί το τρίγωνο AM_1M_2 , όπου A, M_1, M_2 , οι εικόνες των a, z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο.

4. Να σχεδιαστεί το τρίγωνο στη περίπτωση που $a = 1+i$

(BACC. E. DIJON)

ΛΥΣΗ

1. Οι τετραγωνικές ρίζες του W είναι $v_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{2}$
 $v_2 = -(\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{i}{2})$.

2. Η διακρινόσα της (E) είναι:

$$\Delta = a^2(7+i\sqrt{3})^2 - 16a^2(3+i\sqrt{3}) = -2a^2(1+i\sqrt{3}) = -4a^2u.$$

Άρα οι ρίζες της είναι:

$$z_1 = \frac{a(7+i\sqrt{3}) - 2ai v_1}{4} = \frac{a}{4}(7+i\sqrt{3} - i\sqrt{3} + 1) = 2a$$

$$z_2 = \frac{a(7+i\sqrt{3}) - 2ai v_2}{4} = \frac{a}{4}(7+i\sqrt{3} + i\sqrt{3} - 1) = \frac{a}{2}(3+i\sqrt{3}).$$

3. Αν τα προηγούμενα έχω $z_1 - a = a$ και $z_2 - a = \frac{a}{2}(1+i\sqrt{3})$.

$$\text{Άρα } z_2 - a = U(z_1 - a).$$

Λν A, M_1 και M_2 είναι εικόνες των a, z_1, z_2 τότε
 $|\vec{AM}_2| = |\vec{AM}_1|$ και $(\vec{AM}_1, \vec{AM}_2) = \frac{\pi}{3} = \arg u$.

Άρα το τρίγωνο AM_1M_2 είναι ισόπλευρο.

4. Όταν $a = 1+i$ το σημείο A έχει συντεταγμένες $(1,1)$
 το M_1 έχει $(2,2)$. Εξ' αλλού επειδή $z_2 = \frac{1+i}{2}(3+i\sqrt{3})$,
 $= \frac{3-\sqrt{3}}{2} + i \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ το M_2 έχει συντεταγμένες
 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

4. I. Να υπολογιστούν οι τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού $-1-4\sqrt{3}i$.

2. Να λυθεί στο \mathbb{C} , η $z^2 - iz - \sqrt{3}i = 0$.

Εκφράστε κάθε λύση της σε τριγωνομετρική μορφή. Ονομάζουμε z' τη ρίζα με μέτρο 1, και z'' την άλλη ρίζα. Να υπολογιστεί το μέτρο και το όρισμα του $P = z'z''$ και $Q = z/z''$.

(BACC. D, ORLEANS-TOURS)

ΛΥΣΗ

1. Αν $z = x + yi$ για ρίζα (τετραγωνική) τότε
 $(x + yi)^2 = -1 - 4\sqrt{3}i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -1 - 4\sqrt{3}i$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ xy = -2\sqrt{3} \end{cases}$ Αν αφαιρούμε το y έχω
 $x^2 - \frac{12}{x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 12 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 = \frac{-1 \pm 7}{2} = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}$.

Για $x = \sqrt{3}$ έχω $y = -2$ και $x = -\sqrt{3}$ $y = 2$

Άρα οι δύο τετραγωνικές ρίζες είναι $z_1 = \sqrt{3} - 2i$ $z_2 = -\sqrt{3} + 2i$

2. Η διακρίνουσα είναι $\Delta = i^2 - 4\sqrt{3}i = -1 - 4\sqrt{3}i = z_1^2$ και
 η δοθείσα έχει λύσεις $z' = \frac{i + z_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

και $z'' = \frac{i - z_1}{2} = \frac{i - \sqrt{3} + 2i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2} = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$
 $= \sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$

Έχουμε επίσης άλλου, $|P| = |z'z''| = |z'| |z''| = \sqrt{3}$

και $\arg P = \arg z' + \arg z'' = \frac{11\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{13\pi}{6}$ ή $\arg P = \frac{5\pi}{6}$ και $|Q| = \frac{|z'|}{|z''|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

και $\arg Q = \arg z' - \arg z'' = \frac{11\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$.

5. Έστω T η απεικόνιση του $C - \{i/2\}$ στο C , έτσι ώστε
 $\forall z \in C - \{i/2\}, T(z) = \frac{iz-1+2i}{2z-i}$

Να δείχτε ότι η T είναι 1-1 και "επλ" του
 $C - \{i/2\} \rightarrow C - \{i/2\}$ και ότι για την αντιστροφή
 της T , ισχύει $T^{-1} = T$.

(BACC. D. BORDEAUX)

ΛΥΣΗ

Έστω $z \in C - \{i/2\}$ και $z' = T(z)$ η εικόνα του μέσω
 της T . Τότε : $z' = \frac{iz-1+2i}{2z-i} \Leftrightarrow (2z-i)z' = iz-1+2i$

$\Leftrightarrow (2z'-i)z = iz'-1+2i \Leftrightarrow (2z'-i)z' = iz-1+2i$. Από
 η τελευταία δείχνει ότι το $z' \in C - \{i/2\}$. Αφ' ετέρου
 έχουμε τη συνθεσιμότητα :

$$z' = \frac{iz-1+2i}{2z-i} \Leftrightarrow z = \frac{iz'-1+2i}{2z'-i} \quad \text{δηλ.}$$

$z' = T(z) \Leftrightarrow z = T(z')$. Άρα T είναι 1-1 και
 ισχύει $T^{-1} = T$.



6. Έστω ο $z_0 = -2-2i\sqrt{3}$.

α. Να βρεθεί το μέτρο του και το όρισμα του.

Να υπολογιστεί

ο z_0^2 z_0^3 (μέτρο, όρισμα)

β. Να λυθεί στο C , η εξίσωση $z^2 = z_0$

γ. Ομοίως η $z^2 + 2iz + 1 - 2i\sqrt{3} = 0$

(BACC. D. LIMOGES)

ΛΥΣΗ

$$α. z_0 = 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i\sin \frac{4\pi}{3}\right).$$

$$β. |z_0|^2 = |z_0|^2 = 16 \quad \arg z_0^2 = 2 \arg z_0 = \frac{8\pi}{3} \quad \text{όρα } z_0^2 = 16\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8(-1 + i\sqrt{3})$$

$$|z_0^3| = |z_0|^3 = 64 \quad \arg z_0^3 = 3 \arg z_0 = 0. \quad \text{Άρα } z_0^3 = 64.$$

$$β. \text{ Η } z^2 = z_0 \Leftrightarrow \text{ αν } z = \rho(\cos \vartheta + i\sin \vartheta), \rho^2(\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta) = 4\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i\sin \frac{4\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 4 & \Leftrightarrow \rho = 2 \\ 2\vartheta = \frac{4\pi}{3} & \Leftrightarrow \vartheta = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Άρα οι ρίζες που ψάχνουμε είναι:

$$z_1 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3} = -z_1.$$

$$γ. z^2 + 2iz + 1 - 2i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (z+i)^2 + 1 + 1 - 2i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (z+i)^2 = -2 + 2i\sqrt{3} \Leftrightarrow (z+i)^2 = \frac{z_0^2}{4}.$$

Άρα έχω τις δύο εξισώσεις:

$$\begin{cases} z+i = \frac{z_0}{2} & \Leftrightarrow z = -1 - (1+\sqrt{3})i \\ z+i = -\frac{z_0}{2} & \Leftrightarrow z = 1 - (1-\sqrt{3})i \end{cases}$$



7. Εστω $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών που ορίζεται με $z_0 = 2\sqrt{2}(-1+i)$ και τις ακόλουθες συνθήκες: "Για κάθε άρτιο φυσικό n , το πρωτεύον όρισμά του z_{n+1} ανήκει στο διάστημα $[\pi/2, \pi]$ και εκτός $z_{n+1} = z_n$ ".

α. Να βρεθεί το μέτρο και το όρισμα του z_1 θέτοντας $\alpha_n = |z_n|$ και $\varphi_n = \arg z_n$ να δείχτε ότι η (α_n) είναι γεωμ. πρόοδος. ($LN = \text{νεκίρειος λογάριθμος}$)

ΛΥΣΗ.

α. Είναι $z_0 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4} \right)$

Συλ. $|z_0| = 4$ $\arg z_0 = \frac{3\pi}{4}$

Είναι $z_1^4 = z_0 \Leftrightarrow z_1 = \sqrt[4]{z_0}$

Οι τέσσερις ρίζες τετάρτης τάξης του z_0 , προκύπτουν από το τύπο $x_k = \sqrt[4]{4} \left[\cos \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{4} + i\sin \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{4} \right]$ για $k=0, 1, 2, 3$.

Η συνθήκη για το πρωτεύον όρισμα του z_1 ως συνηκίζου να πάρουμε $z_1 = x_1$ με όρισμα $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{16} = \frac{11\pi}{16}$

Άρα $z_1 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{11\pi}{16} + i\sin \frac{11\pi}{16} \right)$.

Η ακολουθία (α_n) είναι προφανώς η $\alpha_0 = 4$, $\alpha_n = 4^{\frac{1}{4^n}}$ δηλαδή $\alpha_n = 4^{\left(\frac{1}{4}\right)^n}$ επομένως $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ δηλ. γεωμ. πρόοδος

8. Εστω (P) το μιγαδικό επίπεδο και μία απεικόνιση F του $P \rightarrow P$ έτσι ώστε: σε κάθε σημείο M (εικόνα του z) να αντιστοιχεί το M' που είναι εικόνα του $z \pm z^2 - 2iz - 1 + i$.

1. Να δείχτε ότι η F είναι "επλ". Είναι $1-1$;
2. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων του P , που μένουν αμετάβλητα μέσω της F .
3. α. Εστω (D) η ευθεία με εξίσωση $\chi=0$. Να βρεθεί η εικόνα της (D) μέσω της F . Να παρασταθεί γραφικά.

β. Έστω (Δ) η ευθεία με εξίσωση $\psi=0$. Να γίνουν τα ίδια με την α. περίπτωση.

(BACC. E. LILLE)

ΛΥΣΗ.

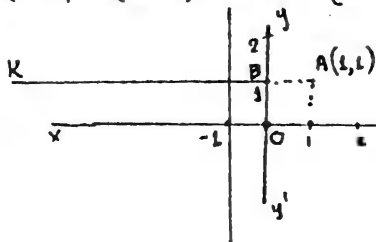
1. Για τον τυχόντα $z_0 = x+yi$ η εξίσωση $z^2 - 2iz - 1 + i = z_0$ έχει πάντα λύση. Άρα η απεικόνιση είναι έπιμ. Επειδή δε, η προηγούμενη εξίσωση έχει χυμιά 2 λύσεις, άρα δε, είναι 1-1.

2. Τα αμετάβλητα γνήσια, προκύπτουν απ' τη λύση της εξίσωσης $f(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2iz - 1 + i = z \Leftrightarrow z^2 - (2i+1)z - 1 + i = 0$

Αυτή έχει λύσεις $z_1 = 1+i$, $z_2 = i$ δηλ τα ζητούμενα γνήσια είναι τα $A(1,1)$ $B(0,1)$.

3. Η ευθεία (D) είναι ο φανταστικός άξονας. Το τυχόν γνήσιο του είναι το $\Gamma(0,y)$ και είναι η εικόνα του αριθμού $z=0+yi$. Σ' αυτόν, αντιστοιχεί μέσω της f , ο αριθμός $f(0+yi) = (yi)^2 - 2i(yi) - 1 + i = -(y-1)^2 + i$. Το αντίστοιχο γνήσιο δηλ. έχει οριστική τετμήνη, και σταθερή (2) τεταγμένη. Δηλ. η εικόνα της (D) είναι η γνήσια ΒΚ.

4. Η (Δ) είναι ο πραγματικός άξονας. Το τυχόν γνήσιο του $\Delta(x,0)$ αντιστοιχεί στον $f(x) = x^2 - 2ix - 1 + i = (x^2 - 1) - (2x-1)i$ και άρα η εικόνα της (Δ) είναι όλο το Ρ,



Εκτός των γνήσιων με τετμήνη μικρότερη του -1, δηλ. τα γνήσια του Ρ, δείχνει και είναι στη ευθεία $x' \Leftrightarrow x^2 - 1$ με εξίσωση $x^2 - 1$ (Το $x^2 - 1$ είναι πάντα ≥ -1)

9. Έστω F η απεικόνιση του $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται:

$$I \quad \chi \in \mathbb{C} \quad F(Z) = Z^3 - (1-5i)Z^2 - 2(5+i)Z + 8i.$$

1. Να δείχτε ότι η εξίσωση $F(Z) = 0$ δέχεται για λύση καθαρώς φανταστικό αριθμό.
2. Να λυθεί στο \mathbb{C} η $F(Z) = 0$. (Να λάβετε υπ' όψη σας $F(Z) = (Z-\lambda i)(Z^2 + \alpha Z + \beta)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{R}$).
3. Έστω z_1, z_2, z_3 οι ρίζες του β' ερωτήματος, όπου z αυτή με αυστηρά θετικό πραγματικό μέρος, z_2 αυτή με πραγματικό μέρος μηδέν. Να δείχτε ότι οι z_1, z_2, z_3 είναι διαδοχικοί όροι γεωμ. προόδου.

(BACC. U GRENOBLE 1975)

ΛΥΣΗ

1. Πρέπει $f(i) = 0 \Rightarrow (i)^3 + (1-5i)(i)^2 - 2(5+i)i + 8i = 0$
 $\Rightarrow (-i^2 + 2i) + (-i^3 + 5i^2 - 10i + 8)i = 0$ Πρέπει να βρώ μια τιμή του i , που να μηδενίζει το πραγματικό και το φανταστικό μέρος. $-i^2 + 2i = 0 \Leftrightarrow i = 0$ ή $i = 2$. Για $i = 2$ μηδενίζεται και το φανταστικό μέρος. Άρα η λύση (καθαρώς φανταστική) είναι $z_2 = 2i$.

$$2. \text{ Είναι } z^3 + (1-5i)z^2 - 2(5+i)z + 8i = (z-2i)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + (\alpha-2i)z^2 + (\beta-2\alpha i)z - 2\beta i.$$

$$\text{Άρα πρέπει } \left. \begin{array}{l} \alpha - 2i = 1 - 5i \\ -2\beta = 8 \\ -2(5+i) = \beta - 2\alpha i \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 1 - 3i \\ \beta = -4. \end{array} \right.$$

Άρα έχω να λύω την $z^2 + (1-3i)z - 4 = 0$

Οι λύσεις της είναι $z_1 = 1+i$ $z_3 = -2+2i$

Π 3. Πράγματι οι $z_1 = 1+i$ $z_2 = 2i$ $z_3 = -2+2i$ απο-
 λείουν διαδ. όρους γεωμ. προόδου αφού $z_2^2 = z_1 \cdot z_3$

10. Εστω το $P(z) = z^3 + 7iz^2 - 4 - 7i$.

1. Υπολογίστε το $P(1)$. Να βρεθεί το πολυώνυμο β' βαθμού $Q(z)$ έτσι ώστε $P(z) = (z-1)Q(z)$.
2. Να λυθεί στο \mathbb{C} η εξίσωση $P(z) = 0$.
3. Εστω στο μιγαδικό επίπεδο τα A, B, Γ οι εικόνες των λύσεων του β' ερωτήματος. Τι τρίγωνο είναι το $AB\Gamma$;

(BACC. ALGERIEN)

ΛΥΣΗ.

$$1. P(1) = 1 - i + 1 - i - 4 + 7i = 0$$

$$z^3 - iz^2 + (1-i)z - 4 + 7i = (z-1)(z^2 + \alpha z + \beta) = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$= z^3 + (\alpha-1)z^2 + (\beta-\alpha)z - \beta$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει αν εξισώσω τον ισοβάθμιο όρων τους συνεπείς ότι: $\alpha = 1-i, \beta = 2-2i$

$$2. \text{Θα λύσω την } z^2 + (1-i)z + 2-2i = 0$$

Αυτή κατά τα γνωστά έχει λύσεις τις $z_1 = -1, z_2 = -7i$.

Η τρίτη λύση είναι θεορίως (της $P(z)=0$) η $z_3 = 1$.

Τα τρία γράμματα, ορίζουν, όπως είναι φανερό ισοσκελές τρίγωνο.

II. θεωρώ το μιγαδικό επίπεδο (P) και το σημείο $A(2i)$. Εστω η $F: P \rightarrow \{A\} \rightarrow P$ με τύπο $F(z) = \frac{2iz-5}{z-2i}$

1. Να δειχθεί ότι υπάρχουν δύο σημεία Β και Γ του Ρ, αμετάβλητα ως προς την F.
2. Να δειχθεί ότι η F είναι 1-1 και να βρεθεί η αντιστροφή.
3. Να δειχθεί ότι η ευθεία ψψ' εκτός του Α, είναι αμετάβλητη ως προς την F (έχει εικόνα τον εαυτό της).
4. Να δεχτεί ότι αν $z \neq 2i \quad |F(z) - 2i| \cdot |z - 2i| = 9$.
5. Να εξάγετε συμπεράσματα για την εικόνα μέσω της F, του κύκλου $\Gamma: (A, r)$. Να προσδιοριστεί το r, ώστε ο κύκλος Γ, να είναι εικόνα του εαυτού του.-

(BACC C, ASIE ET SUD - EST ET AUSTRALIE 1948)

ΛΥΣΗ.

1. Το αμετάβλητο σημείο θα προκύψει αν η λύση της εξίσωσης $f(z) = z$ δλ. $\frac{2iz - 5}{z - 2i} = z$ ή ως

$z^2 - 4iz + 5 = 0$ Οι λύσεις της είναι οι $z_1 = 5i$ $z_2 = -i$ δλ. τα αμετάβλητα σημεία τα $K(0, 5)$ $\Lambda(0, -1)$.

2. Αν η σχέση $\frac{2iz_1 - 5}{z_1 - 2i} = \frac{2iz_2 - 5}{z_2 - 2i} \Rightarrow z_1 = z_2$ παρ 1-1.

Η αντιστροφή προκύπτει εύκολα.

3. Το ευχόν ευρείο $(0, y)$ της yy' έχει την εικόνα στο Ρ, την ευθεία του αριθμού $f(yi) = \frac{2iyi - 5}{yi - 2i} = \frac{2y + 5}{y - 2}$ δλ. είναι σημείο της yy' .

$$4. \left| \frac{2iz-5}{z-2i} - 2i \right| \cdot |z-2i| = \left| \left(\frac{2iz-5}{z-2i} - 2i \right) (z-2i) \right| = |2iz-5-2iz-4|$$

$$= |-9| = 9.$$

5. Η ευθεία του $\Gamma: |z-2i|=r$ είναι ο κύκλος Γ' :

$$|f(z)-2i|=r'. \text{ Αλλά επειδή } |f(z)-2i| = \frac{9}{|z-2i|} \text{ η ακτίνα}$$

του νέου κύκλου Γ' είναι $r' = \frac{9}{|z-2i|}$. Οι δύο κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο, άρα για να συμπίπτουν πρέπει οι ακτίνες τους να ταυτίζονται: δηλ. $\frac{9}{|z-2i|} = r = |z-2i| \Rightarrow |z-2i|=3$ άρα η ζητούμενη ακτίνα $|z-2i|$ είναι $r=3$.

12. Έστω M η εικόνα του $Z=x+iy$ στο μιγαδικό επίπεδο P . Όταν $Z \neq i$ αντιστοιχούμε σ' αυτόν τον

$$Z = \frac{z^2}{z+i}.$$

1. Να βρεθεί και να απεικονιστεί γραφικά το σύνολο (Γ) των σημείων M για τα οποία ο Z είναι καθαρά φανταστικός.

2. Να λυθεί η εξίσωση $z^2 + 2iaz - 2a = 0$ ($a \in \mathbb{R}$)

Να δείχτε ότι οι λύσεις των λύσεων της εξίσωσης αυτής ανήκουν στο σύνολο (Γ) . Το αποτέλεσμα αυτό μπορούσε να προβλεφτεί χωρίς να λυθεί η εξίσωση;

ΛΥΣΗ

1. Τα σημεία $M(z)$ που ανήκουν στο σύνολο (Γ) είναι αυτά που πληρούν την $\frac{z^2}{z+i} = -\frac{\bar{z}^2}{\bar{z}-i} \Leftrightarrow$

$$-z^2(\bar{z}-i) = \bar{z}^2(z+i) \Leftrightarrow i(z^2 - \bar{z}^2) = |z|^2(z + \bar{z}). \text{ Αν θέσω } z = x+iy \text{ η προηγούμενη σχέση γίνεται: } -4xy = (x^2+y^2)2x \Leftrightarrow x^2+y^2-2y=0 \quad (1). \text{ Δηλαδή τα σημεία } M(x,y) \text{ του συνόλου } (\Gamma) \text{ αποτελούν τον κύκλο ως εξής (1).}$$

2. Η εξίσωση λύνεται απλά κατά τα γνωστά. Πώς όμως μπορώ να προβλέπω ότι οι λύσεις της ανήκουν στο σύνολο (Γ) χωρίς προηγούμενα να την επιλύω;

Έστω $x+yi$ μία λύση της. Τότε θα ισχύει ότι:

$$(x+iy)^2 + 2ia(x+iy) - 2a = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 2ay - 2a) + i(2xy + 2ax) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 2ay - 2a = 0 \\ 2xy + 2ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ y = -a \end{cases} \text{ Δηλαδή η}$$

λύση $x+iy$ ως εξής ανήκει στο σύνολο (Γ) ή οι συνημμένες (x,y) του σημείου που είναι λύση της εξίσωσης πληρούν (1).

13. 1. Να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι κυβικές ρίζες του μιγαδικού $\alpha = 16(1-i)$

2. Για οποιδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$ θέτουμε:

$$z_\lambda = 1+i+2\sqrt{2} e^{i\lambda} = x_\lambda + i y_\lambda \quad (\text{Ισχύει } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta).$$

α. Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί x_λ, y_λ συναρτήσει του λ .

β. Να βρεθεί το σύνολο (E) των σημείων M_λ με συντεταγμένες (x_λ, y_λ) όταν $\lambda \in (0, 2\pi)$.

3. Να δείχτε ότι οι λύσεις της εξίσωσης

$$[z - (1+i)]^3 = \alpha, \quad \text{έχουν σαν εικόνες τα σημεία του } (E).$$

(BACC. E, PARIS 1984).

ΛΥΣΗ

1. Είναι $|a| = 16\sqrt{2}$ $\arg a = \frac{7\pi}{4}$

Άρα αν z_0, z_1, z_2 οι τριτογενείς κυβικές ρίζες, έχουμε:

$$z_0 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{15\pi}{12} + i \sin \frac{15\pi}{12} \right) \quad z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right).$$

2. α. $z_1 = 1+i+2\sqrt{2}(\cos\lambda + i\sin\lambda) = x_1 + i y_1 \Leftrightarrow$

$$1+2\sqrt{2}\cos\lambda = x_1$$

$$1+2\sqrt{2}\sin\lambda = y_1. \quad (1)$$

β. Για να βρώ σχέση μεταξύ των x_1, y_1 ανεξάρτητα του λ , αφαίρεσω τα $\sin\lambda, \cos\lambda$ απ' τις (1). Έχω:

$$(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 1)^2 = 8 \quad (2). \quad \text{Αντικαθ. το σύνολο } (E) \text{ είναι}$$

ο κύκλος (2).

3. Η εξίσωση γράφεται: $z - (1+i) = z_k \quad (k=0,1,2)$ και

z_k οι κυβικές ρίζες του α που έχουμε υπολογίσει.

Από δω προκύπτει ότι $z = 1+i+z_k = 1+i+2\sqrt{2}(\cos\lambda + i\sin\lambda)$ άρα

ο z , που είναι λύση της δοθείσας, είναι της μορφής $z_1 = 1+i+2\sqrt{e} e^{i\theta}$ και επομένως ανήκει στο σύνολο (C).

14. Έστω $z_0 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$.

Ι. Θέτω $\alpha = z_0 + z_0^4$ $\beta = z_0^2 + z_0^3$

α. Να δείχτε ότι $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4=0$, και συμπεράνετε, ότι τα α και β είναι λύσεις της

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad (I)$$

β. Να βρείτε το α , συναρτήσει του $\cos \frac{2\pi}{5}$.

γ. Να λύσετε η (I) και να υπολογιστεί η τιμή του $\cos \frac{2\pi}{5}$.

2. Ονομάζω A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των $1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4$ αντίστοιχα.

α. Έστω H το σημείο τομής της ευθείας A_1A_4 με τον άξονα Ox . Να δείχτε ότι $\overline{OH} = \cos \frac{2\pi}{5}$.

β. Έστω (L) ο κύκλος κέντρου $\Omega(-\frac{1}{2})$ που περιβάλλει το $B(i)$. Ο (L) τέμνει τον Ox στα M και N . (το M με θετική τετμημένη). Δείξτε ότι $\overline{OM} = \alpha$ $\overline{ON} = \beta$ και H είναι το μέσο της OM .

γ. Να συνάψετε έναν τρόπο κατασκευής κανονικού πενταγώνου, γνωρίζοντας το κέντρο O και την κορυφή A_0 .

15.1 Να λυθεί στο \mathbb{C} η εξίσωση:

$$(z)^4 = z^4 - 4iz^3 + (3-12i)z^2 - (24+14i)z + 12-36i = 0$$

αν. είναι γνωστό, ότι δέχεται δύο λύσεις καθαρά φανταστικές. Έστω z_1, z_3 αυτές οι λύσεις και z_2, z_4 οι άλλες δύο

2. Να δείχτε ότι τα τέσσερα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 με εικόνες τα z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα, είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

3. Να βρεθεί ένα πολώνυμο τετάρτου βαθμού $P(z) = z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$, να προσδιοριστούν) του οποίου οι ρίζες έχουν σαν εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο, τα σημεία M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 συμμετρικά των M_1, M_2, M_3, M_4 αντίστοιχα ως προς την ευθεία $\psi = \chi$.

(BACC E , AMIENS 1984)

ΛΥΣΗ

1. Έστω το z ρίζα της εξίσωσης. Τότε

$$z^4 - 4iz^3 - (3-12i)z^2 - (24+14i)z + 12-36i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z^4 - 4iz^3 - 3z^2 + 14iz + 12) + i(-12z^2 - 24z - 36) = 0$$

Οι τιμές που μνημονεύουν και τις δύο παρενθίσεις είναι.

$z_1 = 3, z_2 = -1$. Άρα $z_1 = 3i, z_3 = -i$ και η αρχικώς διατεταγμένη ακολουθία με το πολώνυμο $(z-3i)(z+i)$.

Επομένως ισχύει $Q(z) = (z-3i)(z+i)(z^2 + \alpha z + \beta)$ απ όπου έχω

$\alpha = -2i, \beta = 4-12i$. Επομένως οι άλλες δύο ρίζες της

αρχικώς βρίσκονται απ την επίλυση της $z^2 - 2iz + 4-12i = 0$ και

είναι $z_3 = 2+4i, z_4 = -2-2i$

2. Τα εν λόγω σημεία, έχουν στο μιγαδικό επίπεδο ως εξής.

χρυσές: $M_1(0,3) \quad M_2(2,4) \quad M_3(0,-1) \quad M_4(-2,-2)$

Υπολογίζοντας τους συντελεστές κατεύθυνσης, των απέναντι
 ευθειών φαίνεται ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραφο.

$$\text{Πχ } \gamma_{\mu_4 \mu_3} = -\frac{1+2}{2} = -\frac{3}{2} \quad \gamma_{\mu_2 \mu_1} = \frac{4-3}{2-0} = \frac{1}{2} \text{ κλπ.}$$

3. Τα συμμετρικά των τεσσάρων ευθειών μοι-
 ως προς την $y=x$ έχουν συντεταγμένες:

$\mu'_1(3,0)$ $\mu'_2(4,2)$ $\mu'_3(-1,0)$ $\mu'_4(-2,-2)$ άρα οι ρίζες
 του πολυωνύμου $P(z)$ είναι: $z_1=3$, $z_2=4+2i$, $z_3=-1$, $z_4=-2-2i$
 Επομένως το $P(z)=(z+1)(z-3)(z-4-2i)(z+2+2i)$

Εκτελώντας τις πράξεις, και διατάσσοντας ως δυνάμεις των
 z , υπολογίζω τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

16. Έστω P το μιγαδικό επίπεδο και P' το μιγα-
 δικό επίπεδο εκτός του άξονα $\chi\chi'$, Φ το σύνολο
 των μιγαδικών και C' των μιγαδικών εκτός των
 πραγματικών. ($C' = C - R$)

I. Έστω $z \in C'$ και $t \in R$. Να δείχτε ότι ο $z\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t$
 δεν είναι μηδέν και αν $z = \chi + i\psi$ να βρεθεί το πραγ-
 ματικό και φανταστικό μέρος του $z' = \frac{z\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t}{z\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t}$.
 Να συμπεράνετε ότι $z' \in C'$.

Για $t \in R$ ονομάζω F_t την απεικόνιση του $C' \rightarrow C'$
 με τύπο $f_t(z) = \frac{z\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t}{z\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t}$.

2. Να διερευνηθούν τα σταθερά σημεία του f_t .

Εξαρτάται η απάντηση από την παράμετρο t ;

3. Να δείχτε για κάθε ζεύγος (t, t') πραγματικών αριθμών $f_{t, t'} = f_t \circ f_{t'}$. Στη συνέχεια να δείχτε ότι το σύνολο F των απεικονήσεων f_t όταν $t \in \mathbb{R}$ με εσωτερικό νόμο τη σύνθεση των απεικονήσεων είναι αβελιανή ομάδα.

(BACC C. CENTRES D'OUTRE - MER 1983)

ΛΥΣΗ

1. Ο $z \neq t \notin \mathbb{R}$ και ο $\omega \neq t \in \mathbb{R}$. Άρα δεν μπορούν να έχουν όθροισμα 0, εκτός αν μηδενιστούν συγχρόνως για το ίδιο t , ο χt και ο ωt πάλι αδύνατο.

$$\begin{aligned} z' &= \frac{(x+iy)\omega t - \chi t}{(x+iy)\chi t + \omega t} = \frac{(x\omega t - \chi t) + y\omega t i}{(x\chi t + \omega t) + y\chi t i} = \\ &= \frac{[(x\omega t - \chi t) + y\omega t i][(x\chi t + \omega t) - y\chi t i]}{(x\chi t + \omega t)^2 + y^2\chi^2 t^2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Αν τι έχει αυτή υπολογίζεται το πραγματικό και φανταστικό μέρος του z' . Για να είναι $z' \in \mathbb{C}'$ πρέπει το φανταστικό του μέρος να είναι $\neq 0$. Πράγματι αν του (1) ο αριθμητής του φανταστικού μέρους του z' είναι

$$\begin{aligned} & - (x\omega t - \chi t)y\chi t + (x\chi t + \omega t)y\omega t = \\ & = -x\chi\gamma t\omega t + y\gamma\chi^2 t^2 + x\gamma\chi t\omega t + y\omega^2 t = y(\chi^2 t + \omega^2 t) = \\ & y \neq 0 \text{ αφού } 0 = z = x+iy \in \mathbb{C}'. \end{aligned}$$

2. Πρέπει $f_t(z) = z \Rightarrow \frac{z\omega t - \chi t}{z\chi t + \omega t} = z \Leftrightarrow z^2\chi t + \chi t = 0$
 $\Leftrightarrow \chi t(z^2 + 1) = 0$

Άρα για $t \neq 0$ τα σταθερά γινόμενα του μετασχημα-

τις του είναι τα $z = \pm i$. Για $t = kn$ ο τελεσχηματισμός είναι ταυτοτικός.

$$\begin{aligned} \text{3) Είναι } f_t \circ f_{t'} &= \frac{f_{t'} \sin t - \gamma \mu t}{f_{t'} \gamma \mu t + \sin t} = \\ &= \frac{\frac{z \sin t' - \gamma \mu t'}{z \gamma \mu t' + \sin t'} \cdot \sin t - \gamma \mu t}{\frac{z \sin t' - \gamma \mu t'}{z \gamma \mu t' + \sin t'} \gamma \mu t + \sin t} = \\ &= \frac{z \sin t' \sin t - \gamma \mu t' \gamma \mu t - z \gamma \mu t' \gamma \mu t - \gamma \mu t' \gamma \mu t'}{z \gamma \mu t' \sin t - \gamma \mu t' \gamma \mu t + z \sin t' \sin t + \sin t' \sin t} \quad (2) \end{aligned}$$

Αφ' ετέρου $f_{t+t'} = \frac{z \sin(t+t') - \gamma \mu(t+t')}{z \gamma \mu(t+t') + \sin(t+t')}$ οπα αναπτύσσοντας τα τριγωναμετρικά αθροίσματα προκύπτει το δ' μέλος της (2) πράγμα που αποδεικνύει την ιδιότητα.

Επειδή $f_{kn}(z) = z$ και $f_{t+kn} = f_t \circ f_{kn} = f_t$ άρα η f_{kn} είναι ουδέτερο στοιχείο της σύνθεσης των τελεσχηματισμών f_t . Επειδή δε $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'} = f_{kn} = f_{t'} \circ f_{t-kn} = f_{t'}^*$. Δηλαδή για κάθε στοιχείο υπάρχει το συμπέρασμα του.

Είναι επίσης $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'} = f_{t'+t} = f_{t'} \circ f_t$. Δηλαδή η πράξη μας είναι αντιμεταθετική.

Επίσης $f_t \circ (f_r \circ f_s) = f_t \circ f_{r+s} = f_{t+(r+s)} = f_{(t+r)+s} = f_{t+r} \circ f_s = (f_t \circ f_r) \circ f_s$ δηλ. προσεταιριστική. Τέλειω το σύνολο F είναι αντιμεταθετική ομάδα. —

17. I. Να λυθεί στο \mathbb{C} η εξίσωση $z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$ θεωρώντας μια πραγματική προφανή ρίζα.

Ονομάζουμε z_1 την ρίζα με θετικό το φανταστικό μέρος και z_2 , με αρνητικό φανταστικό μέρος.

2. Έστω $S = \{1, -1, z_1, -z_1, -z_2, z_2\}$

Να δείχτε ότι το (S, \cdot) είναι αβελιανή ομάδα.

3. Να δείχτε ότι τα z_1, z_2 είναι μιά βάση του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των $1, z_1^2, z_2^2, z_1 \cdot z_2$, σ' αυτή τη βάση.

(BACC, C, ET E, LIMOGES)

ΛΥΣΗ

1. Η πραγματική ρίζα της εξίσωσης είναι η $z=1$.
 Άρα $z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 - z + 1) = 0$. Άρα $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$
 $z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ (είναι οι μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδας).

2. α. Το σύνολο S είναι "κλειστό" ως προς τον ποτ/μό.
 Πράγματι $-z_1^2 = z_2, z_1^2 = -z_2, z_2^2 = -z_1, -z_2^2 = z_1, z_1 z_2 = 1 \dots$

β. Η προεπιλεγμένη και αντιμεταθετική ιδιότητα είναι ιδιότητες που ισχύουν για τον ποτ/μό.

γ. Ουδέτερο στοιχείο το 1.

δ. Κάθε στοιχείο έχει το αντίστροφό του π.χ. το -1 έχει τον εαυτό του, το z_1 έχει το z_2 , το $-z_1$ έχει το $-z_2$ κτλ.

Άρα είναι αβελιανή ομάδα.

3. Για να είναι τα z_1, z_2 βάση, πρέπει α) να παράγουν το \mathbb{C} , β) Να είναι γραμμ. ανεξάρτητα.

α. Θα εκφράσω τον αριθμό $z = a + bi \in \mathbb{C}$ συναρτήσει των z_1 και z_2 :

$$a + bi = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1 \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right). \text{ Εξισώνω,}$$

προσγχαίνω, φασεδοίνω έχω:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 2a \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} b \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= a + \frac{\sqrt{3}}{3} b \\ \lambda_2 &= a - \frac{\sqrt{3}}{3} b. \end{aligned}$$

Άρα τα z_1, z_2 παρίσταν το \mathbb{C} .

β. Για να γραφτεί αδιαφορώς πρέπει

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ α.δ.}$$

Οι συσχετισμένοι του 1:

$$1 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

Άρα $1 = (1, 1)$ οπότε $z_1 z_2 = (1, 1)$

Για το z_1^2 έχω:

$$z_1^2 = -z_2 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

Ενν. $z_1^2 = (0, -1)$. Οπότε για z_2^2 .

18. Δίνεται η εξίσωση (1) στο 0

$$z^2 - z[-\cos^2 t + i \sin t \cdot \eta \mu t] - \eta \mu^2 t - i \eta \mu t \sin t = 0$$

$$t \in \mathbb{R}.$$

1. Να βρεθεί ο t , ώστε οι ρίζες να είναι αντίθετες.

2. Όστε η μία ρίζα να είναι 0.

3. Αν οι z_1, z_2 είναι ρίζες της (1) να ορίσετε ο t ώστε $|z_1 z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Υποθέτοντας ότι η z_1 είναι πραγματική να βρεθούν οι z_1 και z_2 .

(BACC. C, PARIS)

ΛΥΣΗ.

1. Τότε $z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow -\cos^2 t - i \eta \mu t \cdot \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow$

$$t = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

2. Τότε $z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow -\eta \mu^2 t - i \eta \mu t \cdot \sin t = 0 \Leftrightarrow \eta \mu t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi.$

3. Πρέπει $|z_1 z_2| = |-\eta \mu^2 t - i \eta \mu t \sin t| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$$\sqrt{\eta \mu^4 t + \eta \mu^2 t \cdot \sin^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \eta \mu^2 t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta \mu t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow t = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

4. Αν $z_1 \in \mathbb{R}$, επειδή είναι ρίζα της (1) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} z_1^2 - z_1[-\cos^2 t + i \sin t \cdot \eta \mu t] - \eta \mu^2 t - i \eta \mu t \sin t &= 0 \Leftrightarrow \\ \left. \begin{aligned} z_1^2 + \cos^2 t \cdot z_1 - \eta \mu^2 t &= 0 \\ -z_1 \eta \mu t \sin t - \eta \mu t \sin t &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 1 - \cos^2 t - \eta \mu^2 t &= 0 \\ z_1 &= -1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow z_1 = -1. \end{aligned}$$

Αν $S = z_1 + z_2 \Rightarrow z_2 = S - z_1 = 1 - \cos^2 t + i \eta \mu t \cdot \sin t.$

19. Έστω P το μιγαδικό επίπεδο και M_1, M_2 δύο σημεία του P , εικόνες των Z_1 και Z_2 .

I. Ναδειχτεί ότι οι προτάσεις α και β που ακολουθούν είναι ισοδύναμες:

α . Τα M_1 και M_2 είναι διακεκριμένα και η ευθεία M_1M_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης 1.

β . Ο $\frac{(Z_1 - Z_2)^2}{i}$ είναι πραγματικός αριθμός θετικός.

2. Υποθέτουμε ότι τα Z_1, Z_2 είναι λύσεις της $Z^2 - 2(\alpha + i\beta)Z - 1 - \alpha^2 - 2i = 0$

Ναδειχτεί ότι η πρόταση α είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\gamma: 2\alpha^2 - \beta^2 + 1 = 0$ και $\alpha\beta + 1 > 0$

(SERIE E, AMERIQUE DU NORD)

ΛΥΣΗ

$$1. \quad H \quad (b) \Leftrightarrow \frac{(z_1 - z_2)^2}{i} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2}{i} \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow [(x_1 + iy_1)^2 + (x_2 + iy_2)^2 - 2(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)](-i) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$(x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 - 2x_1x_2 + 2y_1y_2)(-i) + (2x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1) \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = 0 \quad (1) \\ (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0 \quad (2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 \quad (3) \\ \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} > 0 \quad (4) \end{array} \right\}$$

Αν ω (2) \Rightarrow ότι $x_1 \neq x_2$ και $y_1 \neq y_2$ άρα M_1 και M_2 διακεκριμένα

$$(3)(4) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 - y_2 = x_1 - x_2 \\ \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1$ άρα
ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΕΠΙΜΕΛΕΤΗΣ
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ 1.1.

2. Η πρόταση α. ισχύει ή όχι β. όρα
 $0 \frac{(z_1 - z_2)^2}{i} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2}{i} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$

$$\frac{(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2}{i} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{4(a^2 - b^2 + 2ab i) - 4 + 4a^2 + 8i}{i} \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$-i(8a^2 - 4b^2 + 4) + (8ab + 8) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 2a^2 - b^2 + 1 = 0 \\ ab + 1 > 0 \end{array} \right\} \text{ ο.ε.δ.}$$

20. Αν $z \in \mathbb{C}$, θεωρώ την $f(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$

Ι. α. Να δείχτε ότι $f(2) = 0$

β. Να βρεθούν οι z_1, z_2, z_3 που για κάθε $z \in \mathbb{C}$, πληρούν την $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$

2. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ θέτουμε

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) + (z - z_2)(z - z_3) + (z - z_3)(z - z_1)$$

Έστω M_1, M_2, M_3 οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο. Έστω επίσης, ένα σημείο N , εικόνα του αριθμού z . Να δείχτε ότι: αν το N είναι διαφορετικό των M_1, M_2 και M_3 , τότε ο αριθμός που αντιστοιχεί στο διάνυσμα

$$\frac{1}{(M_1 N)^2} \vec{M_1 N} + \frac{1}{(M_2 N)^2} \vec{M_2 N} + \frac{1}{(M_3 N)^2} \vec{M_3 N}$$

είναι ο συζυγής του $f(z)$.

ΛΥΣΗ

$$1. \text{ b. } z(z^2+1) - 2(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow \\ (z-2)(z+i)(z-i) = 0 \quad \text{όρα } z_1 = 2 \quad z_2 = -i, \quad z_3 = i$$

$$\text{Έστω } z = x + yi$$

$$2. \text{ Είσα: } \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_3)} + \frac{1}{(z-z_2)} + \frac{1}{(z-z_1)} =$$

$$= \frac{1}{x+(y-1)i} + \frac{1}{x+(y+1)i} + \frac{1}{(x-2)+yi} =$$

$$= \frac{x-(y-1)i}{x^2+(y-1)^2} + \frac{x-(y+1)i}{x^2+(y+1)^2} + \frac{(x-2)-yi}{(x-2)^2+y^2}$$

$$\text{Άρα } \overline{\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)} = \frac{x+(y-1)i}{x^2+(y-1)^2} + \frac{x+(y+1)i}{x^2+(y+1)^2} + \frac{(x-2)+yi}{(x-2)^2+y^2} \quad (1).$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσω τις συντεταγμένες του δοθέντος διανύσματος. Δηλ τις οποίες θα βρω το μ. γινόμενο που αντιστοιχεί ε' αυτό.

$$\text{Είσα: } \mu_1(2,0) \quad \mu_2(0,-1) \quad \mu_3(0,1) \quad N(x,y) \\ \text{Άρα } \vec{\mu_1 N} = (x-2, y) \quad \vec{\mu_2 N} = (x, y+1) \quad \vec{\mu_3 N} = (x, y-1) \quad \text{αρα}$$

έτο δοθέν διάνυσμα αντιστοιχεί ο αριθμός

$$\frac{1}{(x-2)^2+y^2} [(x-2)+yi] + \frac{1}{x^2+(y+1)^2} [x+(y+1)i] + \frac{1}{x^2+(y-1)^2} [x+(y-1)i] \quad (2)$$

Αν τις (1) και (2) πορίσκει το ίδιο αποτέλεσμα.

21. Κάθε σημείο $M(x, \psi)$ του επιπέδου, E_2 , συνδέεται με τον μιγαδικό $Z = x + i\psi$.

1. Έστω H η προβολή του $M(x, \psi)$ πάνω στην ευθεία με εξίσωση $x=1$. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων M που η $D(M, H) = |Z|$.

2. Να δειχτεί ότι για οποιδήποτε $\theta \in (-\pi, \pi)$, το σημείο M που είναι εικόνα του μιγαδικού $Z = \frac{1}{1 + \sin \theta} - i \frac{1}{1 + \sin \theta} (\sin \theta + i \eta \mu \theta)$ είναι πάνω στην παραβολή $1 + \sin \theta$.

$$P: \psi^2 = -2x + 1.$$

3. Να δειχτεί ότι $\theta \in (-\pi, \pi)$ ισχύει $\frac{\eta \mu \theta}{1 + \sin \theta} = \varepsilon \varphi \frac{\theta}{2}$. Να δευστω συνέχεια ότι όταν το θ μεταβάλλεται στο $(-\pi, \pi)$, το σημείο $M(z)$ με $z = \frac{1}{1 + \sin \theta}$.

$(\sin \theta + i \eta \mu \theta)$ διαγράφει όλη την παραβολή P .

4. Έστω f η απεικόνιση του $E_2 - \{0, 0\}$ στον εαυτό του: $f: M(Z) \rightarrow M'(-\frac{1}{2})$. Αν το θ μεταβάλλεται στο $(-\pi, \pi)$, θεωρούμε το σημείο $M(Z)$ της P με $Z = \frac{1}{1 + \sin \theta} - i \frac{1}{1 + \sin \theta} (\sin \theta + i \eta \mu \theta)$.

α. Να βρεθεί το $1/\bar{Z}$ του $M = f(M)$ σε τριγ. μορφή.

β. Έστω $m'(a')$ το σημείο του E_2 με $a' = \sin \theta (\sin \theta + i \eta \mu \theta)$. Να δειχτεί ότι το ανήκει σε κύκλο C κέντρου $\Omega(1/2, 0)$ και ακτίνας $1/2$.

γ. Να δειχτεί ότι τα σημεία O, M, M', m' είναι συνευθειακά. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του M' και το μέτρο του. Να εξηγηθεί πως μπορούμε να κατασκευάσουμε το M' ξεκινώντας απ το m' του C . Κατασκευάστε μερικά τέτοια σημεία. Επειτα να χαράξετε σημεία της P , απ τα M' μέσω της f .

ΛΥΣΗ

1. Είναι $d(M, H) = |x-1|$ και $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ άρα
 $|x-1| = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow y^2 = -2x+1$. Δηλ. το $M(x, y)$ είναι εστίο
 ως παραβολής $y^2 = -2x+1$.

2. Οι αναλυτικές συντεταγμένες του $z = \frac{1}{1+\omega\theta} (\omega\theta + i\eta\theta)$

είναι $x = \frac{\omega\theta}{1+\omega\theta}$, $y = \frac{\eta\theta}{1+\omega\theta}$. Άρα η εικόνα του z ,

ως σημείο $M(x, y)$ πρέπει για να είναι πάνω στη παρα-
 βολή P να ισχύει:

$$\frac{\eta\theta}{(1+\omega\theta)^2} = -\frac{2\omega\theta}{1+\omega\theta} + 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\theta}{(1+\omega\theta)^2} = \frac{1-\omega\theta}{1+\omega\theta} \text{ που ισχύει.}$$

3. Η πρώτη σχέση αποδεικνύεται εύκολα. Το σημείο
 M έχει συντεταγμένες $x = \frac{\omega\theta}{1+\omega\theta}$, $y = \frac{\eta\theta}{1+\omega\theta} = \operatorname{erf} \frac{\theta}{2}$. Για να δια-

χρίφει ότι η παραβολή P , πρέπει το $y \in (-\infty, \infty)$. Πράγματι
 αφού $\operatorname{erf}(-\infty, \infty) \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \operatorname{erf} \frac{\theta}{2} = y \in (-\infty, \infty)$.

4. α.ζ. $\frac{1}{z} = \frac{1+\omega\theta}{\omega\theta - i\eta\theta} = (1+\omega\theta)(\omega\theta + i\eta\theta)$

β. Ο α' σε αναλυτική μορφή γράφεται: $\alpha' = \omega^2\theta + i\eta\theta\omega\theta$
 άρα έχουμε $m'(\omega^2\theta, \eta\theta\omega\theta)$. Ο κύκλος \mathbb{C} έχει εξίσωση
 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Πράγματι οι συντεταγμένες του m' πληρο-
 σουν την εξίσωση (εύκολα δείχνεται), άρα το $m' \in \mathbb{C}$.

γ. Αναμενόμενως έχω $O(0,0)$
 $M(\frac{\omega\theta}{1+\omega\theta}, \frac{\eta\theta}{1+\omega\theta})$, $M'((1+\omega\theta)\omega\theta, (1+\omega\theta)\eta\theta)$
 $m'(\omega^2\theta, \omega\theta\eta\theta)$. Άρα

...ΤΙΜΩΣ

Οριζόντιες κατευθύνσεις:

$$\gamma_{OM} = \epsilon\phi\theta, \quad \gamma_{OM'} = \epsilon\phi\theta, \quad \gamma_{OM''} = \epsilon\phi\theta. \quad \text{Διτάζει τα}$$

τέσσερα ευθύγραμμα είναι συνευθειακά.

$$\text{Είναι } \vec{m'M'} = (x_{m'} - x_m, y_{m'} - y_m) = (\epsilon\omega\theta, \eta\phi\theta) \Rightarrow$$

$$|\vec{m'M'}| = 1.$$

Άρα για κάθε τιμή του θ , έχω ένα $m' \in C$. Προεκτείνοντας το Om' και παίρνοντας μήκος ίσο με ένα δυο προκύπτει έχω το αντίστοιχο M' .

Είναι δυνατόν για κατάληξη τιμής του θ , π.χ. για $\eta\phi\theta > 0$ και $\epsilon\omega\theta < 0$ το M' να βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά της Om' . Για το σημείο $m'(1,0)$ έχω το $M'(1,0)$. Μένει να βρω το $M(1/2, 0)$ (υποψία της παραβολής), αφού οι $M(z_1), M'(1/2)$ έχουν αντίστροφα, ίσους και ίδιο όρισμα. Η αυτή τη διαδικασία αν το m' έχω τα M' και τελικά τα M της παραβολής P .

22. Έστω (P) το μιγαδικό επίπεδο, και έστω A και M , τα σημεία του, που είναι εικόνες αντίστοιχα των $1-i$ και $3+i$.

Να οριστεί το σημείο M , εικόνα του αριθμού z_1 , ώστε το τρίγωνο AMM_1 να είναι ισοσκελές, το M_1 δοντας πάνω στον $O\phi$.

ΛΥΣΗ

Είναι προφανές ότι θα πληρείται η σχέση:
 $(y+1)^2 + 1 = (y-1)^2 + 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$. Δηλ $z_1 = \frac{1}{2}i$

23 I. Να λυθεί στο \mathbb{C} η $z^5 = 1$. Οι λύσεις να δοθούν σε τριγωνομετρική μορφή. Να απεικονιστούν στο μιγαδικό επίπεδο.

2. Ναδειχτεί ότι το άθροισμα των ριζών είναι το μηδέν.

3. Ναδειχτεί ότι: $\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$

4. Να εκφραστεί το $\sin \frac{\pi}{5}$ συναρτήσει του $\sin \frac{2\pi}{5}$ και μετά, να υπολογιστεί το $\sin \frac{2\pi}{5}$ και το $\sin \frac{4\pi}{5}$. (μόλις για τα $\eta\mu \frac{2\pi}{5}$ και $\eta\mu \frac{4\pi}{5}$).

(BACC. C ALIENS)

ΛΥΣΗ

1. Είναι οι ρίζες της εξίσωσης, οι πέμπτης τάξης ρίζες της μονάδας: $z_0 = 1$, $z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i\eta\mu \frac{2\pi}{5}$,

$z_2 = z_1^2$, $z_3 = z_1^3$, $z_4 = z_1^4$. Στο μιγαδικό επίπεδο είναι ως γνωστό, κορυφές κανονικού πενταγώνου.

2. $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1 + z_1 + z_1^2 + z_1^3 + z_1^4 = \frac{z_1^5 - 1}{z_1 - 1} = 0$.

ΠΩΣ ΤΗΝΘΕ

3. Παίρνοντας τα πραγματικά μέρη του προηγούμενου αθροίσματος έχουμε:

$$1 + 6\omega \frac{2\pi}{5} + 6\omega \frac{4\pi}{5} + 6\omega \frac{6\pi}{5} + 6\omega \frac{8\pi}{5} = 0 \quad \gamma$$

$$1 + 6\omega \frac{2\pi}{5} + 6\omega \frac{4\pi}{5} + 6\omega \frac{4\pi}{5} + 6\omega \frac{2\pi}{5} = 0 \Leftrightarrow 6\omega \frac{2\pi}{5} + 6\omega \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$$

4. Επειδή $6\omega \frac{4\pi}{5} = 2\omega^2 \frac{2\pi}{5} - 1$ (1) η προηγούμενη σχέση γίνεται: $6\omega \frac{2\pi}{5} + 2\omega^2 \frac{2\pi}{5} - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\omega^2 \frac{2\pi}{5} + 6\omega \frac{2\pi}{5} - \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 6\omega \frac{2\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} > 0. \text{ Άν των (1) έχω το } 6\omega \frac{4\pi}{5}.$$

24. Έστω η $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (7+7i)z + 2 - 4i.$$

α. Να δείχτε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}: f(\lambda) = 0$

β. Να βρεθούν δύο μιγαδικοί $\alpha, \beta:$

$$z \in \mathbb{C} \quad f(z) = (z-\lambda)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

γ. Να λυθεί στο \mathbb{C} , η $f(z) = 0$

(SÉRIE C, STRASBOURG)

ΛΥΣΗ

α. Το $\lambda = 2$. Τα υπόλοιπα ατζά.

25.1. Να προσδιοριστούν οι μιγαδικοί αριθμοί $u = \alpha + \beta i$ α, β, τέτοι ώστε $u^2 = 5 - 12i$

2. Θεωρούμε την εξίσωση (E):

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$$

Να δείχτε ότι η (E) δέχεται για λύση καθαρά φανταστικό αριθμό.

3. Να βρεθούν οι λύσεις της (E)

4. Τι συμπεραίνουμε για το τρίγωνο που οι κορυφές του, είναι εικόνες των λύσεων της (E),

(EACC. SERIE E)

ΛΥΣΗ.

$$1. u^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow (\alpha + \beta i)^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = 5 \quad (1) \quad \text{Αλλά} \quad |u|^2 = |5 - 12i| \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 13 \quad (2)$$

$$\alpha\beta = -6 \quad (3)$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow \alpha = \pm 9 \quad \beta = \pm 2\sqrt{2} \quad \text{και επειδή} \quad \alpha \cdot \beta < 0$$

$$\text{έχουμε τελικώς} \quad u = 9 - i2\sqrt{2} \quad u = -9 + i2\sqrt{2}.$$

2. Η καθαρά φανταστική λύση είναι $z_1 = -2i$

Οπότε η (E) βιταχυματίζεται γίνε

$$(z + 2i)[z^2 - (1+4i)z + (-5+5i)] \quad (\text{με διαίρεση})$$

3. Οι λύσεις της είναι

$$z_1 = -2i, \quad z_2 = 5 + i(2 - \sqrt{2}), \quad z_3 = -4 + (2 + \sqrt{2})i.$$

4. Το τρίγωνο με κορυφές $A_1(z_1), A_2(z_2), A_3(z_3)$ είναι ισοσκελές, εφόσον $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$. Οι πλευρές είναι απλές.

26. 1. Να βρεθούν οι ρίζες Z' , Z'' της $Z^2 + (1-3i)Z + (-14+2i)=0$ (όπου Z' η ρίζα με πραγματικό μέρος θετικό).

2. Στο μιγαδικό επίπεδο P , έστω τα A, B, Γ εικόνες των $Z', Z'', -3-i$ αντίστοιχα.

α. Να δειχτεί ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογιστούν οι πλευρές του $\Gamma A, \Gamma B$.

β. Να προσδιοριστεί το σύνολο των M
 $E = \{M \in P / -2\overline{M}\Gamma^2 + 2\overline{M}B^2 + \overline{M}A^2 = 30\}$

(BACC. SERIE E.)

ΛΥΣΗ

1. Είναι $z' = 3+i$, $z'' = -4+2i$

2. α. Είναι $\gamma_{A\Gamma} = \frac{4+i}{3+i} = \frac{1}{3}$, $\gamma_{\Gamma B} = \frac{3}{-1} = -3$.

Άρα $A\Gamma \perp \Gamma B$ και το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο Γ .

β. Η δοθείσα σχέση μετασχηματίζεται:
 $-2[(x+3)^2 + (y+1)^2] + 2[(x+4)^2 + (y-2)^2] + [(x-3)^2 + (y-1)^2] = 30$

όπου (x, y) οι συντεταγμένες του σημείου M .

Εκτελώντας τις πράξεις, καταλήγουμε σε εξίσωση κύκλου, που είναι το Ίντνιέρνο εύνοιο σημείων.

27. Εστω θ πραγματικός αριθμός: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
 Να λυθεί στο \mathbb{C} η εξίσωση:

$$(1 + \sin 2\theta)z^2 - (2\eta\mu 2\theta)z + 2 = 0$$

Να βρεθούν το μέτρο και το όρισμα των ριζών της.

(BACC. C. ORLÉANS-TOURS)

ΛΥΣΗ

Η δοθείσα γράφεται: $z^2 \epsilon\upsilon\eta^2\theta - 2z\eta\mu\theta\epsilon\upsilon\eta\theta + 1 = 0$

Για $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ αυτή δεν έχει λύση.

Για $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ η $\Delta = \eta^2\theta \epsilon\upsilon\eta^2\theta - \epsilon\upsilon\eta^4\theta = -\epsilon\upsilon\eta^4\theta$.

Οι ρίζες της λογικών είναι $z_1 = \frac{\epsilon\upsilon\eta\theta\eta\mu\theta - i\epsilon\upsilon\eta^3\theta}{\epsilon\omega^2\theta}$

$= \frac{\eta\mu\theta - i\epsilon\upsilon\eta\theta}{\epsilon\omega\theta}$ και $z_2 = \frac{\eta\mu\theta + i\epsilon\upsilon\eta\theta}{\epsilon\omega\theta}$.

Μέτρο, όρισμα: Οι δύο ρίζες έχουν το ίδιο μέτρο

$\rho = \sqrt{\frac{\eta^2\theta + \epsilon\upsilon\eta^2\theta}{\epsilon\omega^2\theta}} = \frac{1}{\epsilon\omega\theta}$, αφού $\epsilon\upsilon\eta\theta > 0$.

άρα οι ρίζες γράφονται: $z_1 = \rho \left[\epsilon\upsilon\eta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\eta\mu\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right]$

$z_2 = \rho \left[\epsilon\upsilon\eta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right]$ άρα $\theta_1 = \theta - \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta$.

ΑΛΥΤΑ ΘΕΛΑΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ**28. 1.** Να λυθεί στο \mathbb{C} η εξίσωση:

$$(z^2 - 4z + 5) + i(z + 1) = 0$$

2. Ομοίως η εξίσωση:

$$(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$$

3. Να δειχτεί ότι υπάρχουν οι πραγματικοί A, B, Γ, Δ που να προσδιοριστούν, ώστε

$$\chi \in \mathbb{R} \quad (\chi^2 - 4\chi + 5)^2 + (\chi + 1)^2 = (\chi^2 + \Gamma\chi + \Delta) (\chi^2 + A\chi + B)$$

(EACC. C LILLE 1FJR)

29. Στο σύνολο \mathbb{C} δίνεται η εξίσωση:

$$(E) \quad z^3 - (7+9i)z^2 + 7(-1+6i)z + 13-33i = 0$$

1. Να δειχτεί ότι η (E) δέχεται μια μοναδική πραγματική ρίζα και να υπολογιστεί αυτή.**2. α.** Να λυθεί η (E)

β. Έστω στο μιγαδικό επίπεδο, τα σημεία A, B , και Γ , οι εικόνες των λύσεων της (E). (Σημειώνουμε με A , το σημείο με την μεγαλύτερη τετμημένη). Τι είδους τρίγωνο είναι το $AB\Gamma$,

3. Έστω (D) η ευθεία με εξίσωση $\chi = 6$ και (P) η παραβολή με διευθετούσα την (D) και εστία το A . Να δειχτεί ότι η (P) περιέχει τα B και Γ και να καθορίσετε την κορυφή της. Επίσης να σχεδιαστεί η (P).

(LACC. C PARIS 1985)

30 1. Να εκφραστούν οι ρίζες z_k της εξίσωσης $z^5 = 1$ συναρτήσει των αριθμών : $\theta_k = 2k\pi/5$, όπου $(k \leq 4)$.

2. τι είναι το πολύγωνο με κορυφές τα A_k , τις εικόνες των Z_k ; Κατασκευάστε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού, με συντελεστές φυσικούς που να επαληθεύεται απ' το $\alpha = \sin 2\pi/5$

3. Να λυθεί αυτή η εξίσωση. Να υπολογιστούν τα $\sin 2\pi/5$, $\sin 4\pi/5$, $\sin \pi/5$, και $\sin 8\pi/5$.

4. Με κάθε μιγαδικό αριθμό u , διαφορετικό του -1 , αντιστοιχούμε τον $Z = \frac{u-1}{u+1}$. Να υπολογίσετε τον u , συναρτήσει του Z .

5. Με τη βοήθεια των προηγουμένων να λυθεί στο \mathbb{C} , η εξίσωση $(u-1)^5 = (u+1)^5$. Να παρασταθούν γραφικά οι ρίζες της.

6. Να ερμηνέψτε αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα καθορίζοντας το σύνολο E των σημείων $M(u)$ τέτοιων ώστε: $\left| \frac{u-1}{u+1} \right| = 1$

(GROUPE I, SÉRIE E 1985)

31. I. Αν το u είναι μιγαδικός αριθμός με μέτρο 1 και όρισμα $\theta \in (0, 2\pi)$, να βρεθεί το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού Z που ορίζεται απ' την
$$-\frac{Z-i}{Z+i} = u$$

2. θεωρούμε την εξίσωση στο \mathbb{C} :

(E) $(z^2+1)^N - (z+i)^{2N} = 0$ νεν. Παρατηρώντας ότι το $-i$ είναι λύση της (E) να λυθεί η (E).

(BACC. C NICE 1984)

32. I. Να βρεθεί και να παρασταθεί γραφικά το σύνολο H των σημείων M του P , που είναι εικόνες των Z , που πληρούν την $Z\bar{Z} - (Z^2 + \bar{Z}^2) + 1 = 0$.

Να καθοριστούν οι κορυφές, οι εστιές και η άνω και κάτω εστία των ελλείψεων που περιγράφονται από τις εξισώσεις $4x^2 + 9y^2 = 36$ και $9x^2 + 4y^2 = 36$.

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ

ασύμπτωτες. Να βρεθούν οι γωνίες των ασυμπτώτων με τον Ox .

2. Έστω M ένα σημείο του H , εικόνα του Z . Έστω $|Z|=r$ και έστω θ το όριομα του Z . Να υπολογιστεί το r , συναρτήσει του $\sin\theta$.

(BACC. C TOULOUSE 1984)

33. Έστω η εξίσωση στο C :

$$(E) \quad Z^4 - 6(1+i)Z^3 + 27iZ^2 + 27(1-i)Z - 22+6i = 0$$

1. Να δειχτεί ότι οι ρίζες της εξίσωσης : $Z^2 - (1+2i)Z + 2i = 0$ είναι και ρίζες της (E).

2. Να επιλύσετε την (E), θέτοντάς την στη μορφή $[Z^2 - (1+2i)Z + 2i][Z^2 + \alpha Z + \beta] = 0$ $\alpha, \beta \in C$.

3. Τι είδους είναι το πολύγωνο, που σχηματίζεται από τις εικόνες των λύσεων της E;

(GROUPE I, BIS 1984)

34. $\theta \in [0, 2\pi)$

1. Να λυθεί στο C , η εξίσωση με άγνωστο το Z : $Z^2 - (2^{\theta+1} \sin\theta)Z + 2^{2\theta} = 0$. Να δοθούν οι λύσεις σε τριγωνομετρική μορφή.

2. Στο μιγαδικό επίπεδο, θεωρούμε τα σημεία A και B , εικόνες των λύσεων της εξίσωσης. Να υπολογιστεί το θ ώστε το OAB να είναι ισοπλευρο.

(BACC. C BORDEAUX)

35. Εστω η απεικόνιση του $C - \{-4i\}$ στο C που ορίζεται από τον τύπο: $F(Z) = \frac{Z-2i}{Z-4}$

1. Να βρεθεί και να παρασταθεί γραφικά το σύνολο E των σημείων M , που είναι εικόνες των Z , έτσι ώστε $F(Z)$ είναι πραγματικός αριθμός.

2. Ομοίως το σύνολο E_2 των σημείων M , ώστε το όρισμα του $F(Z)$ να ισούται με $\pi/2$.

3. Ομοίως το E_3 ώστε το μέτρο του $F(Z)=2$

(BACC. B BORDEAUX)

36. 1. Να επιλυθεί στο C η εξίσωση:

$$Z^3 - (3+2i)Z^2 + (2+4i)Z = 0$$

2. Εστω A, B, Γ οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των λύσεων αυτής. Να δείχτεί ότι υπάρχει σημείο Δ , με μηδενική τεταγμένη, διάφορο από τα A, B, Γ που ανήκει στον κύκλο που ορίζουν αυτά. Να βρεθεί η τεταγμένη του Δ .

(BACC C. CAEN)

36. 1. α. Εστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Να λυθεί η εξίσωση:

$$(E_{\alpha},) \begin{cases} Z \in C \\ Z^2 - 2Z \sin \alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

β. Να δοθούν σε τριγωνομετρική μορφή οι ρίζες της $(E_{\alpha, \nu})$

$$\begin{cases} Z \in C \\ Z^{2\nu} - 2Z^{\nu} \sin \alpha + 1 = 0 \quad \nu \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$

2. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ θέτουμε
 $P_\alpha(z) = z^{2\nu} - 2z^\nu \sin \alpha + 1$. Δεχώμαστε ότι $P_\alpha(z) =$
 $(z^2 - 2z \sin \alpha / \nu + 1) \dots [(z^2 - 2z \sin(\alpha / \nu + 2\pi / \nu) + 1) \dots \dots \dots$
 $[z^2 - 2z \sin(\alpha / \nu + \frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} + 1)]$ και σημειώνουμε
 $P_\alpha(z) = \prod_{j=0}^{\nu-1} [z^2 - 2z \sin(\frac{\alpha}{\nu} + \frac{2j\pi}{\nu}) + 1]$.

α. Να υπολογιστεί το $P_\alpha(1)$ και να δειχτεί
 ότι $\prod_{j=0}^{\nu-1} \eta_{\mu}^2(\frac{\alpha}{\nu} + \frac{2j\pi}{\nu}) = \eta_{\mu}^2(\frac{\alpha}{\nu})$

β. Για κάθε $\alpha \in (0, \pi)$ και για κάθε $\nu \geq 2$ θέ-
 τουμε $H_\nu(\alpha) = \prod_{j=0}^{\nu-1} \eta_{\mu}(\frac{\alpha}{\nu} + \frac{2j\pi}{\nu})$
 Να δειχτεί ότι για $\alpha \neq 0$, $2^{\nu-1} H_\nu(\alpha) = \frac{\eta_{\mu}^{\frac{\alpha}{2}}}{\eta_{\mu}^{\frac{\alpha}{2\nu}}}$

γ. Ποιό είναι το όριο του $H_\nu(\alpha)$ όταν $\alpha \rightarrow 0$;

δ. Να δειχτεί ότι $\nu=2$
 $\eta_{\mu}^{\frac{\pi}{\nu}} \eta_{\mu}^{\frac{2\pi}{\nu}} \dots \dots \dots \eta_{\mu}^{\frac{(\nu-1)\pi}{\nu}} \eta_{\mu}^{\frac{\nu}{2\nu-1}}$

(BACC E. PARIS)

1

Δίνεται η εξίσωση β' βαθμού

$$x^2 + (\mu - 3)x + 1 - 2\mu = 0 \quad (\mu \text{ παράμετρος})$$

1. Να δεχτεί ότι δέχεται πάντα δύο ρίζες

2. Πάνω σ' έναν άξονα Ox, θεωρούμε τα σημεία M, M'' με τετμημένες τα x', x'' (ρίζες της αρχικής). Για ποιά μ, οι κύκλοι με διαμέτρους τα OM, OM'' εφάπτονται εξωτερικά; (Να μην βρεθούν οι ρίζες).

Αν S είναι το άθροισμα των εμβαδών αυτών των κύκλων να μελετηθούν οι μεταβολές της $y = \frac{4S}{\pi}$ (συναρτήσεις του μ).

3. Για ποιά μ, ισχύει η $\frac{x'}{2x''} + \frac{x''}{2x'} + 3 = 0$;

4. Υπάρχει σχέση μεταξύ των x', x'' που να είναι ανεξάρτητη του μ; Για ποιά μ, η μία ρίζα είναι τριπλάσια της άλλης; Να υπολογιστούν τότε οι ρίζες.

Baccalaureat Pontichery.

Δ Υ Σ Η

1. $\Delta = (\mu + 1)^2 + 4 > 0$. Αρα έχω πάντα δύο ρίζες.

Για να εξετάσω το πρόσημο παρατηρώ: $P = 1 - 2\mu$ και $S = -\mu + 3$. Αν λοιπόν $1 - 2\mu > 0$ μ < 1 το S είναι θετικό και επομένως οι δύο ρίζες είναι θετικές. Ενώ για $\mu > 1$ οι δύο ρίζες ετερόσημες.

2. Οι δύο κύκλοι θα εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν, τα σημεία M και M'', βρίσκονται εκατέρωθεν του O, δηλ. αν οι ρίζες είναι ετερόσημες δηλ. αν $\mu > 1$.

Το άθροισμα των εμβαδών είναι:

$$S = \frac{\pi(x'^2 + x''^2)}{4} = \frac{\pi(S^2 - 2P)}{4} = \frac{\pi}{4} (\mu^2 - 2\mu + 7). \text{ Αρα } y = \frac{4S}{\pi} = \mu^2 - 2\mu + 7.$$

Θα μελετήσω λοιπόν τις μεταβολές της y , μόνον όμως για $\mu > \frac{1}{4}$ αφού τότε ισχύει. Αυτές δίνονται από το πίνακα.

μ	$\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
y	$\frac{25}{4}$	5	$+\infty$
	ελ.	↗	της y είναι, τμήμα της παραβολής.

3. Η σχέση που δίνεται γράφεται:

$$x'^2 + x''^2 + 6x'x'' = 0 \text{ ή } 5^2 + 4\rho = 0 \text{ ή } (3-\mu)^2 + 4(1-2\mu) = 0 \text{ ή } \mu^2 - 14\mu + 13 = 0. \text{ Οι ρίζες είναι } \mu' = 1 \text{ και } \mu'' = 13. \text{ Για } \mu = 1 \text{ η αρχική γράφεται } x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ με ρίζες } 1 \pm \sqrt{2} \text{ κ.λ.π.}$$

4. Μια σχέση των ριζών ανεξάρτητη του μ , δίνεται από $5 = 3 - \mu$ $\rho = 1 - 2\mu$ άρα $25 - \rho = 5$ δηλ.

$$2(x' + x'') - x'x'' = 5.$$

Όταν η μία ρίζα είναι τριπλάσια της άλλης έχω:

$$x' = 3x''$$

$$x' + x'' = 3 - \mu$$

$$x'x'' = 1 - 2\mu \quad \text{Απ' τις δύο πρώτες έχω}$$

$$x' = 3x'' = 3 \frac{3-\mu}{4}. \text{ Αντικαθιστώντας στην τρίτη έχω}$$

$$\frac{3}{16} (3-\mu)^2 = 1 - 2\mu \text{ ή } 3\mu^2 + 14\mu + 11 = 0 \text{ με ρίζες τα}$$

$$\mu = -1 \text{ και } \mu = -\frac{11}{3}. \text{ Αν } \mu = -1 \text{ } x' = 3 \text{ } x'' = 1$$

$$\text{αν } \mu = -\frac{11}{3} \text{ } x' = 5 \text{ } x'' = -\frac{5}{3}.$$

2

Έστω οι εξισώσεις (1) $x^2 + \mu x - 1 = 0$ (2) $x^3 - x - 1 = 0$

1. Να δειχτεί ότι αυτές έχουν πάντα ρίζες και να μελετηθεί το προσημό τους. Να βρεθούν οι ρίζες της (2).

2. Θέτω $f(x) = x^2 + \mu x - 1$ και $g(x) = x^3 - x - 1$. Έστω

$x', x'', (x' < x'')$ οι ρίζες της (1) και α, β ($\alpha < \beta$) οι ρίζες της (2). Να δειχτεί ότι $f(\alpha) = \alpha(\mu + 1)$. Να δειχτεί δε ότι αν $\mu > -1$ τότε ο αριθμός α βρίσκεται ανάμεσα στα x', x'' . Επίσης να δειχτεί ότι αν $\mu > -1$, α, β , είναι μεγαλύτεροι από το x'' . Να επαναλάβετε την προηγούμενη μελέτη για τις σχετικές θέσεις των α, β, x', x'' , όταν $\mu < -1$.

3. Να κάνετε στο ίδιο σύστημα τις γραφικές παραστάσεις (F) και (G) των συναρτήσεων $y = x^2 - 1$ και $y = x^3 - x - 1$. Να δείξετε ότι έχουν ένα κοινό σημείο του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

4. Να εξετάσετε πως αυτές οι γραφικές παραστάσεις πιστοποιούν τα πορίσματα της (2) ερώτησης, σχετικά με τις θέσεις των α, β, x', x'' , για μια υρισμένη τιμή του μ .

(Baccalauréat France métrop)

Λ.Υ.Σ.Η

1. Οι ακραίοι συντελεστές κάθε εξίσωσης είναι ετερόσημοι. Άρα έχουν πάντα ρίζες. Οι ρίζες αυτές κάθε εξίσωσης είναι ετερόσημες ($P < 0$) δηλ. $x' < 0 < x''$. Οι ρίζες της (2) είναι $x' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ $x'' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

2. $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha\mu - 1$. Επίσης $g(\alpha) = \alpha^3 - \alpha - 1 = 0$
 $\alpha^3 = \alpha + 1$. Θέτω τη τιμή αυτή του α στην προηγούμενη σχέση

Έχουμε $f(a) = a + 1 + a\mu - 1 = a(\mu + 1)$

Αν τώρα $\mu > -1$ ή $\mu + 1 > 0$. Αρα $f(a) = a(\mu + 1) < 0$ αφού $a < \beta$ και οι a, β , είναι ετερόσημοι. Η προηγούμενη σχέση δείχνει ότι $x' < a < x''$.

Ομοίως δείχνουμε ότι $f(\beta) = \beta(\mu + 1) > 0$ άρα ο β βρίσκεται εκτός των x', x'' , δηλ. τελικά έχω $x' < a < x'' < \beta$.

Όταν $\mu < -1$ ή $\mu + 1 < 0$ το $f(a) = a(\mu + 1) > 0$ και το $f(\beta) < 0$ δηλ. τότε έχουμε $a < x' < \beta < x''$.

3. Οι δυο καμπύλες (F) και (G) είναι δύο παραβολές. (Κατασκευάζονται ευκολα). Οι συντεταγμένες του κοινού σημείου δίνονται από τη λύση της $x^2 - 1 = x^2 - x - 1$ $x = 0$

Αρα αυτό είναι το $(0, -1)$. Τα σημεία τομής με τον άξονα Ox είναι τα σημεία μετετμημένες το $-1, 1$ για τη μια και τα $\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ για την άλλη

4. Η καμπύλη (F) προκύπτει για την τιμή $\mu = 0$ δηλ. είναι η περίπτωση όπου $\mu = -1$. Εκεί ισχύει $x' < a < x'' < \beta$. Πράγματι ισχύει $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3

Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της $(x - a_1)(x - a_2) - k = 0$ τότε τα a_1, a_2 είναι ρίζες της $(x - x_1)(x - x_2) - k = 0$

Η άσκηση επεκτείνεται στα a_1, a_2, \dots, a_n .

(Ecole speciale de mécanique).

-5-

Λ Υ Σ Η

Αφού τα x_1, x_2 είναι ρίζες της $(x-a_1)(x-a_2)+κ$ τότε έχουμε την ταυτότητα παραγοντοποίησης ($a=1$)

$$(x-a_1)(x-a_2)+κ=(x-x_1)(x-x_2)$$

$(x-a_1)(x-a_2)=(x-x_1)(x-x_2)-κ$. Αυτή η σχέση δείχνει (Παραγοντοποίηση) ότι τα a_1, a_2 είναι ρίζες του $(x-x_1)(x-x_2)-κ$

4. Εστω η $y=ax^2+bx+3$

1. Να προσδιοριστούν τα a, b ώστε $y_{\max} = 4$ για $x=1$.

Να παρασταθεί γραφικώς (P) η συνάρτηση που θα προκύψει.

2. Εστω $A(0, \frac{17}{4})$. Να γραφεί η εξίσωση των ευθειών που περνούν από το A. (παράμετρος μ). Για ποιά μ , η ευθεία εφάπτεται στην (P);

3. Να δείχτεί ότι από το A περνούν δυο εφαπτόμενες στην (P) κάθετες μεταξύ τους. Να βρεθούν τα σημεία τομής τους με τους άξονες.

4. Εστω B σημείο της παράλληλης προς τον OX, από το A. Να δείχτεί ότι οι εφαπτόμενες από το B, στην (P) είναι κάθετες μεταξύ τους.

(Baccalauréat Libanaïsis)

Λ Υ Σ Η

α. Το τριώνυμο παίρνει άκρα τιμή για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Αρα $-\frac{\beta}{2\alpha} = 1$ ενώ $f(1) = a + \beta + 3$. Έχω λοιπόν το σύστημα

$$\beta = -2\alpha$$

$4 = \alpha + \beta + 3$ δηλ. $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Η συνάρτηση είναι λοιπόν η $y = -x^2 + 2x + 3$.

Η γραφική της παράσταση είναι παραβολή, με τα κοίλα κάτω άξονα συμμετρίας τον $x=1$ και κορυφή το σημείο $(1,4)$. Κόβει τον Ox στα $(-1,0)$, $(3,0)$.

β. Οι εξισώσεις των ευθειών που περνάν από το Α, είναι $y = \mu x + \frac{17}{4}$. Αν αυτή η τυχούσα ευθεία τέμνει την (P) οι τετμημένες των σημείων τομής θα είναι οι ρίζες της $-x^2 + 2x + 3 = \mu x + \frac{17}{4}$. Θα εφάπτεται λοιπόν στην (P) αν η προηγούμενη εξίσωση έχει διπλή ρίζα (1 κοινό σημείο) δηλ. αν $\Delta = 0$ ή $(\mu - 2)^2 - 5 = 0$ $\mu' = 2 - \sqrt{5}$ $\mu'' = 2 + \sqrt{5}$

γ. Όμως τα μ' και μ'' είναι συντελεστές κατεύθυνσης των δύο εφαπτομένων από το Α. Και είναι $\mu' \cdot \mu'' = -1$, άρα αυτές είναι κάθετες μεταξύ τους. Η πρώτη τέμνει τον Ox στο σημείο με τετμημένη $x' = -\frac{17}{4\mu'} = \frac{17(\sqrt{5}+2)}{4}$ και η άλλη με $x'' = \frac{17(2-\sqrt{5})}{4}$

δ. Έστω λ οι συντελεστές κατεύθυνσης των ευθειών που περνούν από το Β $(\alpha, \frac{17}{4})$. Τότε η εξίσωση των ευθειών αυτών είναι $y = \lambda(x - \alpha) + \frac{17}{4}$. Τα κοινά σημεία αυτών και

της (P), (οι τετμημένες) δίνονται από τη λύση της $-x^2 + 2x + 3 = \lambda(x - \alpha) + \frac{17}{4}$ ή $x^2 + (\lambda - 2)x - \lambda\alpha + \frac{5}{4} = 0$. Άρα έχουμε επαφή όταν $\Delta = 0$ $\lambda^2 - 4\lambda(1 - \alpha) - 1 = 0$. (1) Άρα για κάθε α , δηλ. για οποιαδήποτε θέση του Β, πάνω στην ευθεία της άσκησης, οι συντελεστές κατεύθυνσης των δυο εφαπτομένων, (ρίζες της 1) έχουν γινόμενο $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ δηλ. οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.

5. 1. Αν μ είναι παράμετρος, σχηματίστε την εξίσωση β' βαθμού, που δέχεται για ρίζες τους αριθμούς

$$x' = \mu + 3, \quad x'' = x^2 - 6x' + 10$$

2. Πότε η εξίσωση αυτή δέχεται διπλή ρίζα, αντίθετες ρίζες, μία ρίζα μηδέν;

3. Πα διερευνηθεί η διαφορά $x' - x''$ για τα διάφορα μ

4. Πότε η διαφορά αυτή είναι μέγιστη και ποιά είναι τότε;

5. Οι ρίζες x', x'' είναι συναρτήσεις του μ . Παραστήσατε γραφικά, πάνω στο ίδιο σύστημα, τις μεταβολές των συναρτήσεων αυτών, όταν το μ , μεταβάλλεται. Με τη βοήθεια των παραστάσεων αυτών, επαληθεύστε τα πορίσματα των 2, 3, 4, ερωτήσεων.

(Bacc. série tech. France métro)

Λ Υ Σ Η

1. $x'' = x^2 - 6x' + 10 = \mu^2 + 1$. Άρα $x' + x'' = \mu^2 + \mu + 4$ και $x'x'' = (\mu + 3)(\mu^2 + 1)$. Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2 + (\mu^2 + \mu + 4)x + (\mu + 3)(\mu^2 + 1) = 0$ (1).

2. Διπλή ρίζα σημαίνει $x' = x''$ $\mu + 3 = \mu^2 + 1$ $\mu^2 - \mu - 2 = 0$ που ισχύει για $\mu = 2$ ή $\mu = -1$.

Αντίθετες ρίζες σημαίνει $x' + x'' = 0 \Rightarrow \mu^2 + \mu + 4 = 0$ η οποία δεν έχει ρίζες. Άρα ποτέ δεν συμβαίνει να υπάρχουν στην (1) αντίθετες ρίζες.

Για μηδενική η μία ρίζα: Αποκλείεται η $x'' = \mu^2 + 1 > 0$ πάντα.

Άρα $x' = \mu + 3 = 0 \Rightarrow \mu = -3$ οπότε η $x'' = 10$

3. $x' - x'' = -\mu^2 + \mu + 2$. Η παράσταση αυτή είναι μηδέν για $\mu' = -1$ και $\mu'' = +2$ θετική όταν $-1 < \mu < 2$ και αρνητική για τα υπόλοιπα μ .

Δηλ. οι ρίζες έχουν ως εξής:

$$x' = x'' \quad \text{όταν } \mu = -1 \text{ ή } \mu = 2$$

$$x' > x'' \quad \text{όταν } -1 < \mu < 2$$

$$x' < x'' \quad \text{όταν } \mu < -1 \text{ ή } \mu > 2.$$

4. Η διαφορά επίσης γράφεται $x' - x'' = -(\mu - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}$
δηλ. είναι ίση με $\frac{9}{4}$ όταν $\mu = \frac{1}{2}$ και μικρότερη από
το $\frac{9}{4}$ όταν $\mu \neq \frac{1}{2}$

5. Η $x' = \mu + 3$ είναι η ευθεία (D) που περνάει από τα σημεία $(-3, 0)$, $(-1, 2)$, $(2, 5)$. Η $x'' = \mu^2 + 1$ είναι η παραβολή (P), με τα "κόλλα πάνω" και κορυφή το $A(0, 1)$. Τα κοινά σημεία των (D) και (P) είναι $x' = x'' = 2$ όταν $\mu = -1$ και $x' = x'' = 5$ όταν $\mu = 2$ (2η ερώτηση). Παρατηρούμε λοιπόν για τα διαφορά μ , ότι το σημείο με τεταγμένη x' που βρίσκεται πάνω στην (D) βρίσκεται "πάνω" (μεγαλύτερη τεταγμένη) από το σημείο με τεταγμένη x'' που βρίσκεται πάνω στην (P) όταν $-1 < \mu < 2$ όπως απεδείχθη στην 3η ερώτηση. Επίσης η $x' = 0$ μόνο για $\mu = -3$. (Η γραφική παράσταση των x' , x'' γίνεται σε ορθ. άξονες όπου οι τετμημένες είναι τα μ , και οι τεταγμένες τα x (x' , x''). Αν επίσης χαράξουμε την ευθεία (D') συμμετρική της (D) ως προς τον $O\mu$, παρατηρούμε ότι δεν τέμνει την (P) δηλ. ποτέ δεν έχουμε $x' = x''$ (2η ερώτηση)

6. Παραρτούμε την $y = -x^2 + 2(\mu + 1)x + \mu - 5$

1. Να μελετηθούν οι μεταβολές της (μονοτονία, ακρότατα και στη συνέχεια να παρασταθούν γραφικά οι C_0 και C_2 καμπύλες που αντιστοιχούν στις τιμές $\mu = 0$ και $\mu = 2$.

2. Να δειχτεί ότι, όταν το μ μεταβάλλεται, οι καμπύλες (C_μ) των συναρτήσεων y περνούν από σταθερό σημείο I .

3 α. Για ποιά μ , η καμπύλη (C_μ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα Ox ; Να βρεθούν αυτά τα μ , στα οποία αντιστοιχούν σημεία κοινά με τον άξονα Ox .

Εστω A, B δύο τέτοια σημεία. Ποιές είναι οι τετμημένες τους;

β. Για ποιά μ , η καμπύλη (C_μ) τέμνει τον Ox στα M', M'' (δύο σημεία;)

4. Να δειχτεί ότι όταν το μ , μεταβάλλεται τα σημεία M', M'' , παραμένουν συζυγή αρμονικά των A, B .

(France métropole session de rattachement)

Λ Υ Σ Η

1. Η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή την $\mu^2 + 3\mu - 4$ για $x = \mu + 1$. Η μέγιστη αυτή τιμή της συνάρτησης, οντας τριώνυμο, θα υφίσταται τις ανάλογες μεταβολές όταν μεταβάλλεται το μ .

Επίσης όταν $x \rightarrow \pm\infty$ το $y \rightarrow -\infty$

Για $\mu = 0$ έχω την $y = -x^2 + 2x - 5$. Παραβολή με άξονα την $x = 1$ κορυφή το $(1, 4)$ και τέμνει τον Oy στο $(0, -5)$. Είναι η C_0 .

Για $\mu = 2$ έχω την $y = -x^2 + 6x - 3$. Παραβολή με άξονα συμμετρίας των $x = 3$, κορυφή το $(3, 6)$ και τέμνει τον Oy στο $(0, -3)$. Είναι η C_2 .

2. Η παράμετροι μ , μιας καμπύλης (C_μ) που περνάει από δοθέν σημείο $P(x_0, y_0)$ εκφράζεται από τη σχέση:

$\mu(2x_0+1)=y_0+x_0^2-2x_0+5$. Αν $x_0 \neq -\frac{1}{2}$ αυτή η εξίσωση έχει μία λύση. Δηλαδή από κάθε σημείο P του σιόλου η τετμημένη είναι διάφορη του $-\frac{1}{2}$ περνάει μια μοναδική καμπύλη (Cμ).

Αν $x_0 = -\frac{1}{2}$ ή προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$\mu \cdot 0 = y_0 + \frac{25}{4}. \text{ Αυτή είναι αδύνατη όταν } y_0 \neq -\frac{25}{4}, \text{ ενώ}$$

δέχεται άπειρες λύσεις όταν $y_0 = -\frac{25}{4}$, ενώ δέχεται

άπειρες λύσεις όταν $y_0 = -\frac{25}{4}$. Δηλαδή όταν το P έχει

τετμημένη το $-\frac{1}{2}$ και τεταγμένη το $-\frac{25}{4}$, τότε όλες οι

καμπύλες (Cμ) περνούν από το $(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4})$, το οποίο είναι το ζητούμενο I.

γ.α. Η καμπύλη (Cμ) έχει ένα κοινό σημείο με τον OX, όταν και μόνον όταν, η κορυφή της βρίσκεται πάνω σ'αυτόν τον άξονα. Η τεταγμένη της κορυφής, είναι η παράσταση $\mu^2+3\mu-4$. Άρα πρέπει $\mu^2+3\mu-4=0$ δηλαδή συμβαίνει όταν $\mu^*=1$ και $\mu^{**}=-4$

Αν $\mu=1$ η (C₁) έχει κορυφή το A(2,0)

Αν $\mu=-4$ η (C₋₄) έχει κορυφή το B(-3,0).

β. Για να έχει η (Cμ) δύο κοινά σημεία με το OX, και επειδή στρέφει τα "κόλμα κάτω" πρέπει η τεταγμένη της κορυφής να είναι θετική δηλ. $\mu^2+3\mu-4 > 0$ δηλ. για $\mu < -4$ ή $\mu > 1$

δ. Εστω x' και x'' οι τετμημένες των M', M'' . Για να είναι αυτά συζυγή αρμονικά των A και B πρέπει να ισχύει
 $2(x'x''+x_1x_2)=(x'+x'')(x_1+x_2)$ (1) (θεωρούμε)

-11-

Όμως τα x', x'' , όταν υπάρχουν είναι ρίζες της αρχικής $-x^2 + 2(\mu+1)x + \mu - 5 = 0$. Άρα $x' + x'' = 2(\mu+1)$ και $x'x'' = 5 - \mu$.
Επίσης $x_1 + x_2 = 2 - 3 = -1$ και $x_1x_2 = -6$ άρα η σχέση (1) πληρείται ο.ε.δ

7.

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + 5 - (\mu - 1)^2 = 0$

1. Να βρεθεί (μελετηθεί) το πλήθος των ριζών

2. Να οριστεί ο μ , ώστε η εξίσωση να δέχεται δύο θετικές ρίζες

3. Κάνοντας χρήση της γραφικής παράστασης της

$y = x^2 - 6x + 5$, να επαληθεύσετε τα πορίσματα των δύο πρώτων ερωτήσεων.

4. Θωρούμε τις συναρτήσεις (Ε) $y = (\mu - 2)x^2 + 4x + 3 + \mu$

α. Να οριστεί το μ ώστε, οι παραβολές της εξίσωσης (Ε) να τέμνουν τον άξονα Ox , σε δύο σημεία M' και M'' .

Εστω x' και x'' οι τετμημένες τους.

β. Να βρεθεί μια σχέση ανεξάρτητη του μ , μεταξύ των x' και x'' .

γ. Τι πρέπει να ισχύει ώστε, μια παραβολή από την εξίσωση (Ε) εφάπτεται στον Ox ; Στην περίπτωση αυτή να δείχτεί ότι τα σημεία επαφής που προκύπτουν, σχηματίζουν με τα M' και M'' αρμονική τετράδα;

(Bacc. Antilles et Guyane).

Λ Υ Σ Η

1. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4 + (\mu - 1)^2$. Άρα πάντα υπάρχουν δύο ρίζες. Αν $\mu = 1$ οι δύο ρίζες είναι 1 και 5. Για άλλες τιμές του μ , επειδή $F(1) = F(5) = -(\mu - 1)^2$ το οποίο είναι αντίθετου προσήμου με τον συντελεστή του x , οι ρίζες x', x'' πληρούν την $x' < 1 < 5 < x''$.

2. Η χ'' , αφού είναι μεγαλύτερη από το 5, είναι πάντα θετική. Οι δύο ρίζες θα είναι θετικές αν και μόνο αν, το γινόμενο τους είναι θετικό δηλ. $(\mu-1)^2 < 5$
 $1 - \sqrt{5} < \mu < 1 + \sqrt{5}$

γ. Η $y = \chi^2 - 6\chi + 5$, είναι μια παραβολή (P) με τα "κοί-λά άνω" με άξονα συμμετρίας την $\chi = 3$, και κορυφή το $A(3, -4)$. Τέμνει τον $O\chi$ στα σημεία $B(1, 0)$ και $\Gamma(5, 0)$ και τον Oy στο $\Delta(0, 5)$.

Εστω λοιπόν επίσης η ευθεία (Δ) με εξίσωση $y = (\mu-1)^2$.

Οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής των καμπύλων (P) και (Δ) και που όπως φαίνεται απ' την γραφική εικόνα:

α. Οι ρίζες αυτές πάντα υπάρχουν, αφού πάντα υπάρχουν δύο σημεία τομής της ευθείας (Δ) και της παραβολής (P), διότι η ευθεία (Δ) έχει πάντα θετική τεταγμένη.

β. Οι τετμημένες των κοινών σημείων (ρίζες της αρχικής) θα είναι θετικές αν η τεταγμένη της (Δ) είναι μικρότερη απ' την τεταγμένη επί την αρχή της (P) δηλ. αν $(\mu-1)^2 < 5$.

γ. Η μια τετμημένη των κοινών σημείων (η μία ρίζα της αρχικής) είναι πάντα μεγαλύτερη του 5 και η άλλη μικρότερη του 1.

δ. |. Οι παραβολές (E) τέμνουν τον $O\chi$ αν και μόνο αν, η εξίσωση (E) έχει δύο λύσεις δηλ. $4 - (\mu-2)(\mu+3) > 0$ (1), βέβαια πρέπει $\mu \neq 2$, γιατί για $\mu=2$ έχω την ευθεία $y = 4\chi + 5$ η οποία τέμνει τον $O\chi$ στο $(-\frac{5}{4}, 0)$. Η (1) γράφεται:

$$\mu^2 + \mu - 10 < 0 \quad \text{με} \quad \mu_1 = \frac{-1 - \sqrt{41}}{2} \quad \mu_2 = \frac{-1 + \sqrt{41}}{2} \quad \text{άρα η (1) θα}$$

θα ισχύει αν $\mu_1 < \mu < \mu_2$. Όταν το μ ισουται με μ_1 ή μ_2

η παραβολή (E) που αντιστοιχεί, εφάπτεται στον Oχ.

2. Όταν $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ (με $\mu \neq 2$), οι τετμημένες x' και x'' των σημείων τομής της (E) με τον Oχ πληρούν την εξίσωση: $(\mu-2)x^2 + 4x + 3 + \mu = 0$. Το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών αυτών είναι $S = \frac{-4}{\mu-2}$ και $P = \frac{\mu+3}{\mu-2}$

Με απαλοιφή του μ έχω: $5S + 4(P-1) = 0$ η

$$5(x' + x'') + 4x'x'' - 4 = 0 \quad \text{σεδ (2)}$$

γ. Όταν το μ ισούται με μ_1 ή μ_2 τότε οι αντίστοιχες παραβολές εφάπτονται στον Oχ, στα M_1 και M_2 . Οι τετμημένες x_1 και x_2 αυτών των σημείων είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 + 5x - 2 = 0$, που προκύπτει απ' τη (2) θέτοντας $x' = x''$:

Εχουμε λοιπόν $x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$ και $x_1 x_2 = -1$. Άρα η σχέση (2) μπορεί να γραφεί $-(x_1 + x_2)(x' + x'') + 2(x'x'' + x_1 x_2) = 0$ η

$2(x'x'' + x_1 x_2) = (x' + x'')(x_1 + x_2)$ δηλ. τα M', M'' παραμένουν αρμονικά συζυγή, προς τα M_1, M_2 .

8

Θεωρούμε την εξίσωση β' βαθμού

(E) : $(a-1)t^2 + 2(\beta-a)t + (a+1) = 0$ όπου t είναι ο άγνωστος και τα (a, β) είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου H ενός επιπέδου.

1. Ποιά σχέση πρέπει να πληρούν τα a, β ώστε η (E) να έχει διπλή ρίζα; Να βρεθεί ο γ. τόπος των σημείων του επιπέδου που επαληθεύουν τη σχέση αυτή.

2. Ποιά είναι η αντίστοιχη σχέση μεταξύ των a, β ώστε η (E) να έχει 2 ρίζες; Σε ποιά περιοχή του επιπέδου πρέπει να παρούμε το $M(a, \beta)$ ώστε να συμβαίνει αυτό;

Λ Υ Σ Η

1. Κατ'αρχήν πρέπει $a \neq 1$, ώστε η (Ε) να είναι δευτέρου βαθμού. Στη συνέχεια πρέπει η διακρίνουσα της (Ε) να μηδενίζεται: $(\beta - a)^2 - (a-1)(a+1) = 0$ ή $(\beta - a)^2 - (a-1)^2 = 0$. Άρα τα (a, β) πρέπει να πληρούν τη σχέση $(y-x)^2 - x^2 + 1 = 0$. Ο γεωμ. τόπος των σημείων του επιπέδου που πληρούν τη σχέση αυτή προκύπτει απ' τις γραφικές παραστάσεις των καμπύλων που προκύπτουν, αν τη προηγούμενη σχέση την λύσω ως προς y . Αυτές είναι $y = x + \sqrt{x-1}$ και $y = x - \sqrt{x-1}$ (γ). Οι γραφικές παραστάσεις αυτών, είναι καμπύλες που βρίσκονται αντίστοιχα στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο, και αναλυτικά θα προσδιοριστούν σε επόμενη άσκηση, γιατί η θεωρία τους ξεφεύγει απ' τη θεωρία του τριωνύμου.

2. Για να έχει η (Ε) δύο ρίζες πρέπει $(\beta - a)^2 > a^2 - 1$ (1). Αυτή γράφεται και διερευνάται ανάλογα με την τιμή του $a-1$.

Ετσι αν $a^2 - 1 < 0$ ή $-1 < a < 1$, το σημείο Μ βρίσκεται στο χώρο του επιπέδου ανάμεσα στις ευθείες $x=1$ και $x=-1$.

Αν όμως $a^2 - 1 > 0$, δηλαδή αν το Μ βρίσκεται εκτός των προηγούμενων παραλλήλων η (1) γράφεται:

$$(\beta - a)^2 - (\sqrt{a-1})^2 > 0 \quad \text{ή}$$

$(\beta - a - \sqrt{a-1})(\beta - a + \sqrt{a-1}) > 0$ που πληρείται όταν οι δύο όροι του γινομένου είναι ομόσημοι, δηλ. όταν το β είναι μεγαλύτερο απ' τις $a + \sqrt{a-1}$, και $a - \sqrt{a-1}$ ή μικρότερο από τις δυο αυτές εκφράσεις. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Μ πρέπει να βρίσκεται "πάνω" ή "κάτω" από τις καμπύλες (γ).

(Η έννοια του "πάνω" από την καμπύλη γ σημαίνει ότι το εν λόγω σημείο, έχει τεταγμένη μεγαλύτερη από την τεταγμένη του σημείου της καμπύλης, το οποίο όμως έχει

την ίδια τετμημένη με το Μ. Δηλ. αν $M(a, \beta)$ το σημείο που εξετάζεται και $A(a, y(a))$ το σημείο της καμπύλης ισχύει $\beta > y(a)$).

9

1. Δίνεται η παράσταση $E = (x+2)(x+1) - 2x(x+2)$.

Να μελετηθεί το πρόσημο της παράστασης.

2. Να μελετηθούν οι μεταβολές των συναρτήσεων $y = 2x(x+2)$ και $z = (x+2)(x+1)$ και να χαραχθούν στο ίδιο σύστημα οι καμπύλες (C) και (C') των δύο συναρτήσεων. Από τη γραφική τους αυτή παράσταση να εξάγετε συμπεράσματα για το πρόσημο της (E) και να τα συγκρίνετε με τα συμπεράσματα της ερώτησης (1).

3. Να υπολογίσετε τους συντελεστές α, β, γ, του τριωνύμου $y = ax^2 + bx + \gamma$ έτσι ώστε το μέγιστο του τριωνύμου να ισούται με 8, και η γραφική παράσταση να περνάει από τα κοινά σημεία Α και Β των καμπύλων (C) και (C').

4. Να δειχτεί ότι η ευθεία $y = \mu(x+2)$ περνάει από ένα κοινό σημείο των (C) και (C'). Να βρεθεί αυτό. Στη συνέχεια αυτή τέμνει τις δύο καμπύλες σε ένα δεύτερο σημείο, στο Μ την (C) και στο (Μ') την (C'). Να υπολογίσετε συναρτήσεις του μ , τις συντεταγμένες των Μ και Μ' και του μέσου Ρ του ΜΜ'. Να βρεθεί η εξίσωση του γ. τόπου του Ρ. Να χαραχτεί ο γ. τόπος του Ρ.

Λ Υ Σ Η

1. Η Ε γράφεται $E = (x+2)(1-x)$: Άρα μηδενίζεται στα -2 και 1, είναι θετική για $-2 < x < 1$ και αρνητική για $x < -2$ και $x > 1$.

2. Η $y = 2x(x+2)$ έχει τον ακόλουθο πίνακα μεταβολής:

-16-

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -1 & +\infty \\ y & +\infty & -2 & +\infty \\ \hline & \text{ελ.} & & \end{array}$$

$$H \quad z = (x+2)(x+1)$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -3/2 & +\infty \\ z & +\infty & -1 & +\infty \\ \hline & \text{ελ.} & & \end{array}$$

και η (C) είναι παραβολή με τα "κοίλα άνω" που τέμνει τον Oχ στα -2,0, και έχει άξονα συμμετρίας την $x=-1$.

έχει πίνακα μεταβολών:

και η (C') είναι παραβολή με τα "κοίλα άνω" άξονα συμμετρίας την $x=-\frac{3}{2}$, τέμνει

τον Oχ στο -2,-1 και τον Oy στο (0,2).

Εστω $H(x,y)$ και $H'(x,z)$ τα σημεία των (C) και (C') αντίστοιχα που έχουν όμως την ίδια τετμημένη. Έχουμε ότι $\overline{HH'} = z - y = E$. Άρα το πρόσημο της E εξαρτάται απ' το προσανατολισμό του διανύσματος $\overrightarrow{HH'}$. Παρατηρούμε επίσης ότι οι δύο καμπύλες (C) και (C'), τέμνονται στα A και B, των οποίων οι τετμημένες είναι λύσεις της $2x(x+2) = (x+2)(1-x)$ δηλ. -2 και 1. Έχουμε λοιπόν στο A, $y=z=0$ και στο B, $y=z=6$. Βλέπουμε λοιπόν απ' τη γραφική παράσταση ότι η (C') βρίσκεται "κάτω" από την (C), όταν $-2 < x < 1$. Άρα η $E = \overline{HH'}$ είναι θετική.

$$3. \text{ Πρέπει για μέγιστη } = 8: \alpha < 0 \text{ και } \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = 8 \quad (1)$$

Για να περνάει δε από τα A(-2,0) και B(1,6) να ισχύουν

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 4\alpha - 2\beta + \gamma \\ 6 = \alpha + \beta + \gamma \end{array} \right\} (2) \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha + 2 \quad \gamma = 4 - 2\alpha \text{ και μέσω της (1)}$$

$$4\alpha(4 - 2\alpha) - (\alpha + 2)^2 = 32\alpha \quad \text{ή} \quad 9\alpha^2 + 20\alpha + 4 = 0 \text{ με}$$

$$\text{ρίζες τα } \alpha' = -2 \text{ και } \alpha'' = -\frac{2}{9}. \text{ Άρα υπάρχουν δύο συναρτήσεις}$$

που να πληρούν τα ζητούμενα:

$$y' = -2x^2 + 8 \quad \text{και} \quad y'' = -\frac{2}{9}(x^2 - 8x - 20).$$

4. Η $y = \mu(x+2)$ πληρείται από τις συντεταγμένες του A(-2,0). Άρα περνάει απ' αυτό. Επίσης τέμνει την (C')

στο M' που έχει τετμημένη την λύση της $\mu(x+2)=(x+2)(x+1)$
δηλ. την $\mu-1$. Ομοίως την (C) στο σημείο M με τετμημένη $\frac{\mu}{2}$

Δηλ. $M(\frac{\mu}{2}, \mu(\frac{\mu}{2}+2))$ $M'(\mu-1, \mu(\mu+1))$.

Οι συντεταγμένες του μεσου P του MM' είναι

$$x = \frac{3\mu-2}{4} \quad y = \frac{3\mu(\mu+2)}{4} \quad \text{Απαλείφοντας το } \mu$$

απ' τις δύο εξισώσεις έχω $y = -\frac{2}{3}(2x^2 + 5x + 2)$. (γ. τόπος)

Η γραφική παράσταση του γ. τόπου είναι γνωστή παραβολή.

10

Εστω a , τόξο εκφρασμένο σε ακτίνα, και $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$.

στο οποίο αντιστοιχούμε την καμπύλη (γραφική παράσταση)
της συνάρτησης $y = x^3 - 2x \sin a + 1 - \eta \mu a$.

1. Για ποιες τιμές του a , οι αντίστοιχες καμπύλες
εφάπτονται στον άξονα Ox ; Να χαραχτούν αυτές οι καμπύλες
στο ίδιο σύστημα και να βρεθούν οι συντεταγμένες των
κοινών τους σημείων.

2. Δείξτε ότι για όλες τις άλλες τιμές του a , η
γραφική παράσταση της y , τέμνει τον Ox σε δύο σημεία
 P' και P'' με θετικές τετμημένες.

3. Για ποιές τιμές του a , οι τετμημένες x' και x''
του P' και P'' πληρούν τη σχέση $x'^2 + x''^2 = 2$;

4. Ποιά σχέση ανεξάρτητη του a , πληρούν τα x' , x'' ;

5. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κοινών σημείων
των καμπύλων που αντιστοιχούν σε ένα τόξο a ($a \neq \frac{\pi}{2}$)

4

και στο συμπληρωματικό του.

Λ Υ Σ Η

1. Πρέπει η εξίσωση $x^2 - 2\alpha x + 1 - \eta\mu\alpha = 0$ (1) να έχει μια διπλή ρίζα. Δηλ. $\Delta' = \sin^2 \alpha - 1 + \eta\mu\alpha = \eta\mu\alpha(1 - \eta\mu\alpha) = 0 \Rightarrow$

$\alpha = 0$ ή $\alpha = \frac{\pi}{2}$ Για τις τιμές αυτές του α , η συνάρτηση

παίρνει τις ακόλουθες μορφές.

$$y_1 = x^2 \text{ αν } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ και } y_2 = (x-1)^2 \text{ αν } \alpha = 0$$

Οι καμπύλες (C_1) και (C_2) είναι δύο παραβολές απλής κατασκευής. Η (C_2) περνάει από την αρχή των αξόνων και η (C_1) απ' το το $(1,0)$ (κορυφή). Το κοινό τους σημείο έχει τετμημένη την λύση της $x^2 = (x-1)^2$ δηλ. είναι το $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

2. Στις άλλες τιμές του α , η Δ' είναι θετική. Άρα η εξίσωση (1) δέχεται δυο ρίζες και επομένως η γραφική παράσταση τέμνει τον Ox σε δύο σημεία τα P' και P'' των οποίων οι τετμημένες είναι οι δύο ρίζες της (1).

Οι ρίζες αυτές είναι θετικές άρα τα σημεία έχουν θετικές τετμημένες.

$$3. \text{ Έχω } x' + x'' = 2\alpha \text{ και } x'x'' = 1 - \eta\mu\alpha.$$

Άρα η δοθείσα $x'^2 + x''^2 = 2$ γράφεται $(x' + x'')^2 - 2x'x'' = 2$ και

$$4\sin^2 \alpha - 2(1 - \eta\mu\alpha) - 2 = 0 \Rightarrow 4(\sin^2 \alpha - 1) + 2\eta\mu\alpha = 0 \text{ ή } \eta\mu\alpha(1 - 2\eta\mu\alpha) = 0 \text{ άρα } \alpha = 0 \text{ ή } \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$x' = x'' = 1$ άρα $x'^2 + x''^2 = 2$ στη δεύτερη τα x', x'' , είναι ρίζες της $x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$ δηλ. $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ $x'' = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ άρα $x'^2 + x''^2 =$

$$2\left(\frac{3+1}{4}\right) = 2$$

$$4. \text{ απ τις } x' + x'' = 2\alpha \text{ και } x'x'' = 1 - \eta\mu\alpha \text{ έχω } \sin\alpha = \frac{x' + x''}{2}$$

$$\text{και } \eta\mu\alpha = 1 - x'x''. \text{ άρα ισχύει } \frac{(x' + x'')^2}{4} + (1 - x'x'')^2 = 1$$

-19-

δηλ. $x^3 + x^2 + 4x^2 + x^2 - 6x^2 + x^2 = 0$

5. Οι συντεταγμένες ενός τέτοιου σημείου είναι η λύση του παρακάτω συστήματος.

$$y = x^2 - 2x_{\text{συνα}} + 1 - \eta_{\text{μα}}$$

$$y = x^2 - 2x_{\eta_{\text{μα}}} + 1 - \sigma_{\text{υνα}}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη βρούμε το x

(2) $2x(\sigma_{\text{υνα}} - \eta_{\text{μα}}) + \eta_{\text{μα}} - \sigma_{\text{υνα}} = 0$ δηλ. αν $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$ $x = \frac{1}{2}$ οπότε

$$y = \frac{5}{4} - \sigma_{\text{υνα}} - \eta_{\text{μα}}.$$

Αν $\alpha = \frac{\pi}{4}$ η (2) είναι αδύνατη, οπότε οι δύο καμπύλες⁴ ταυτίζονται.

11

Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
και το γραμμικό σύστημα $\left. \begin{array}{l} \beta x + 2\alpha y = 0 \\ 2\gamma x + \beta y = 0 \end{array} \right\} (2)$

Ονομάζουμε S_1 το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης (1)
και S_2 το σύνολο των λύσεων του συστήματος (2).

1. Να δειχτεί ότι αν το πλήθος των στοιχείων του S_1 είναι 2, τότε το αντίστοιχο πλήθος του S_2 είναι 1.

2. Είναι το αντίστροφο αληθές;

3. Να βρεθεί το σύνολο S_2 αν το πλήθος του S_1 είναι 1.
(Classes de première A ει3):

Λ Υ Σ Η

1. Έστω Δ η διακρίνουσα της (1) και D η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του (2). Τότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$$D = \begin{vmatrix} \beta & 2\alpha \\ 2\gamma & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad \text{δηλ. } \Delta = D \quad \text{Το πλήθος του } S_1$$

είναι 2 αν και μόνο αν η Δ είναι θετική το οποίο ση-

μαίνει $D \neq 0$. Και επειδή το σύστημα (2) είναι ομογενές, έχουμε ότι $S_2 = \{0, 0\}$ Δηλ. το πλήθος του S_2 είναι 1.

2. Το πλήθος του S_2 είναι 1, αν και μόνο αν έχουμε $D \neq 0$ δηλ. $\Delta \neq 0$. Δηλ. είναι δυνατόν $\Delta > 0$ ή $\Delta < 0$

Αρα το πλήθος του S_1 είναι 2 ή 0. Δηλ. το αντίστροφο που ζητάει η άσκηση δεν ισχύει.

3. Το πλήθος του S_1 είναι 1 αν $\Delta = 0$ οπότε $D = 0$
Αρα τότε το σύστημα (2) που είναι ομογενές έχει άπειρες λύσεις που περιγράφονται απ' το $S_2 = \{x, y\} \text{ με } R$
 $y = -\frac{\beta}{2\alpha} x$.

12.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2x + 3$ και $g(x) = -2x^2 + 10x - 9$.

1. Να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων. Εστω C και C' οι αντίστοιχες καμπύλες.

2. Να δείχτεί ότι C και C' έχουν ένα κοινό σημείο με τετμημένη 2, και ότι δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.

Λ Υ Σ Η

Οι πίνακες μεταβολών τους είναι

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$F(x)$	$+\infty$	$\searrow 2 \nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$	5/2	$+\infty$
$G(x)$	$-\infty$	$\nearrow 7/2 \searrow$	$-\infty$

Η (C) γραφικά είναι παραβολή με τα "κοίλα άνω", με κορυφή το (1,2) και τέμνει το Oy στο (0,3). Η (C') στρέφει τα "κοίλα κάτω" έχει κορυφή το $(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ και τέμνει τον Ox στις ρίζες της $-2x^2 + 10x - 9 = 0$

2. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των δύο καμπύλων είναι οι λύσεις της $x^2 - 2x + 3 = -2x^2 + 10x - 9$ δηλ.

$x=2$. Άρα έχουμε 1 κοινό σημείο το A(2,3).

Στο σημείο A έχουμε $F'(2) = G'(2) = 2$. Άρα οι δύο καμπύλες έχουν κοινή εφαπτόμενη στο A που δίνεται από την εξίσωση : $y-3=2(x-2)$ ή $y=2x-1$

Επειδή δε και $F(2) = G(2)$ έχουμε ότι οι δύο καμπύλες (C) και (C') εφάπτονται στο σημείο A.

43

Γ' Λυκείου

Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = x^2 - |x| - 2$

1. Να δειχτεί ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0)
2. Να παρασταθεί γραφικά.

(classes de premiere A et B)

Λ Υ Σ Η

1. Παράγωγος απο δεξιά στο σημείο 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x - 2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$$

ΤΙΝΟΣ

Παράγωγος από αριστερά στο σημείο 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1 \quad \text{Αρα δεν υπάρχει παρά-} \\ \text{γωγος στο } x=0.$$

2. Επειδή $F(-x) = F(x)$ η συνάρτηση είναι άρτια. Αρα η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy. Θα μελετήσουμε λοιπόν μόνο στο R^+ .

Ο πίνακας μεταβολών για την $F(x) = x^3 - x - 2$ στο R^+ είναι

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$F(x)$	-2	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$

Η γραφική της λοιπόν παράσταση είναι τμήμα παραβολής που τέμνει τον Oy στο $A(0, -2)$ έχει κορυφή το $B(\frac{1}{4}, -\frac{9}{4})$ και τέμνει τον Ox στο $(2, 0)$ κ.λ.π.

17

Να γραφούν δύο εξισώσεις δευτέρου βαθμού έτσι ώστε οι ρίζες της καθε μίας να είναι το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της άλλης.

(Ecole des hautes études Commerciales).

ΛΥΣΗ

Εστω (E) $x^2 - px + q = 0$ και

(E') $x^2 - p'x + q' = 0$ δύο εξισώσεις που πληρούν τα δεδομένα του προβλήματος. Οι ρίζες της (E) έστω οι

p' και q' , και της (E') οι p και q . Έχουμε

(1) $p' + q' = p$ (3) $p + q = p'$ Προσθέτοντας κατά μέλη

(2) $p'q' = q$ (4) $pq = q'$ τις (1) και (3) καθώς

και τις (2) και (4) έχουμε

$$q + q' = 0 \quad \text{ή} \quad q + q' = 0$$

$$pq + p'q' = 0 \quad q(p - p') = 0 \quad \text{Αν λοιπόν} \quad q = 0 \quad \text{όρα} \quad q' = 0 \quad \text{οι εξισώσεις (1) και (3) γίνονται η}$$

σχέση $p = p'$. Τότε οι εξισώσεις (Ε) και (Ε') γίνονται
 $(E_1): x^2 - px = 0 \quad (E'_1): x^2 - px = 0$, με p τυχόντα, που πληρούν τις προϋποθέσεις.

Αν, αφ'ετέρου, $p - p' = 0$ δηλ. $p = p'$ οι εξισώσεις (1) και (3) γίνονται $q' = 0$, $q = 0$ και βρίσκουμε τις ίδιες εξισώσεις (E_1) και (E'_1) όπως προηγουμένως, οι οποίες είναι και μοναδικές. -

15

Δίνεται η πραγματική παράμετρος a ώστε $0 \leq a \leq 2\pi$ και θεωρούμε την εξίσωση με άγνωστο το

$$x: \quad x^2 - 4\eta\mu a + 2(1 - \sqrt{3})\eta\mu a + \sqrt{3} = 0$$

Να μελετηθούν οι τιμές του a , για τις οποίες αυτή η εξίσωση δέχεται μια διπλή ρίζα. Για ποιά a , έχει δύο ρίζες διακεκριμένες;

(Classes de première C, D et E).

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα της εξίσωσης $\Delta' = 4\eta\mu^2 a + 2(\sqrt{3} - 1)\eta\mu a - \sqrt{3}$
ή $\Delta' = 4(\eta\mu a + \frac{\sqrt{3}}{2})(\eta\mu a - \frac{1}{2})$ Άρα

$$\Delta' = 0 \quad (\eta\mu a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu a = \frac{1}{2}) \quad \text{και} \quad (0 \leq a \leq 2\pi) \quad \text{όρα}$$

$$a = \frac{4\pi}{2} \quad \text{ή} \quad a = \frac{5\pi}{3} \quad \text{και} \quad a = \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad a = \frac{5\pi}{6}$$

Οι ζητούμενες λοιπόν τιμές της παραμέτρου a είναι

-24-

οι $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ και $\frac{5\pi}{3}$.

Για να έχουμε διακεκριμένες ρίζες πρέπει $\Delta' > 0$
 δηλ. $\eta\mu\alpha > \frac{1}{2}$ ή $\eta\mu\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ με $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

Αρα έχουμε τα διαστήματα $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ και $(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$.

Α Λ Υ Τ Α Θ Ε Μ Α Τ ΑΣΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ

1. Εστω η εξίσωση

$$(1) \quad x^2 - 2\sigma\omega\psi x + (2 - \sqrt{3})(1 - 4\eta\mu^2\varphi) = 0$$

οπου $0 < \varphi < \pi$.

1. Να μελετηθεί το πλήθος και το πρόσημο των ριζών.

2. Εστω η γωνία $\chi\theta\psi = \frac{\pi}{6}$. Στην περίπτωση που οι ρίζες

της (1) είναι θετικές, ονομάζουμε Α και Β τα σημεία των $O\chi$ και $O\psi$ αντίστοιχα έτσι ώστε $OA = \chi'$ και $OB = \chi''$. Να υπολογιστεί το ΑΒ, καθώς και η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΟΒ.

(Sujet de concours, école Breguet).

2. θεωρούμε τη συνάρτηση $y = x^2 + 2(3\mu + 5)x + 3\mu + 25$.

1. Για ποιές τιμές του μ , η αντίστοιχη καμπύλη τέμνει (P_μ) τον $O\chi$;

2. Όταν η (P_μ) τέμνει τον $O\chi$ σε δύο σημεία M' και M'' να δειχτεί ότι υπάρχει πάνω στον άξονα των x , ένα σημείο Α έτσι ώστε $\overline{AM'} \cdot \overline{AM''} = \frac{\kappa^2}{4}$, οπου κ μια σταθερή η οποία να προσδιοριστεί.

3. Να κατασκευαστούν οι καμπύλες (P_0) και (P_{-3})

που αντιστοιχούν στις τιμές $\mu = 0$ και $\mu = -3$. Τι ιδιομορφία παρουσιάζουν; Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των

σημείων τομής τους.

4. Να δειχτεί ότι όταν το μ διατρέχει το \mathbb{R} ο γ. τόπος των κορυφών των (P_μ) είναι μια παραβολή.

(Bacc. 1^{re} partie, Série tech. B, Dakar)

3. Έστω (P) και (P') οι καμπύλες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$y_1 = (x + \mu - 3)^2 - 4 \quad \text{και} \quad y_2 = (x + 2\mu)^2 - 4 \quad \text{αντίστοιχα.}$$

1. Να κατασκευαστούν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι καμπύλες (P_0) και (P'_0) που αντιστοιχούν στην τιμή $\mu = 0$

Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο αυτών καμπύλων.

Να δειχτεί ότι οι (P_0) και (P'_0) είναι συμμετρικώς προς άξονα, παράλληλον του Oy

2. Ποιός είναι ο γ. τόπος των κορυφών των καμπύλων (P) και (P') όταν το μ μεταβάλλεται;

Να υπολογιστούν συνάρτηση του μ , οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των καμπύλων (P) και (P') . Για ποιά τιμή του μ , οι δύο καμπύλες ταυτίζονται;

(Bacc. 1^{re} partie, série tech. A, Alger).

4. 1. Να λυθεί και να διερευνηθεί η εξίσωση

$$(E) : \sin^2 x + 2\mu \eta \mu x - \rho = 0 \quad \text{όπου } \mu \text{ και } \rho \text{ παράμετροι.}$$

2. Θεωρώντας τα μ και ρ , σαν συντεταγμένες ενός σημείου M , σε ορθογώνιο σύστημα, στο επίπεδο, ερμηνέψτε γραφικά, τα αποτελέσματά της προηγούμενης διερεύνησης λαμβάνοντας υπ' όψη τη θέση του σημείου M στο επίπεδο.

3. Εξετάστε την ειδική περίπτωση όπου $\rho = \mu + 1$.

4. Να παρασταθεί γραφικά η $y = \frac{x^2}{x-1}$.

5. Με τη βοήθεια της καμπύλης αυτής, εποληθέψτε γραφικά τα πορίσματα του ερωτήματος 3.

(Bacc. Math. Dakar)

5. 1. Να παρασταθεί γραφικά η $y=x(4-x)$

2. Μια ευθεία, με κλίση 1 και τεταγμένη επί την αρχή μ , τέμνει την καμπύλη (C) σε δύο σημεία, τα M και N, ενώ η παράμετρος είναι μικρότερη από μια τομή μ_0 , η οποία να προσδιορίζεται.

3. Ποιός είναι ο γ. τόπος του μεσου I, του MN συνάρτησει του μ .

4. Εκφράστε το τετράγωνο της απόστασης MN συναρτήσει του μ .

5. Να προσδιοριστεί το μ , ώστε η απόσταση του I και της κορυφής S της καμπύλης(C) ισούται με το μισό του MN.

(Bacc. 1^{re} partie, series c1 ÀMontréal).

6. θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \mu x^2 - 2(\mu-1)x + \mu - 2$
 όπου $\mu \in \mathbb{R}$

1. Εστω g η συνάρτηση που προκύπτει για $\mu=0$ και (D) η γραφική της παράσταση. Να βρεθούν τα σημεία τομής της με τους άξονες του συστήματος, καθώς και να χαρακτηί η (D).

2. Εστω $F(x)$ η συνάρτηση που προκύπτει για $\mu=2$ και (C) η γραφική της παράσταση. Ομοίως να βρεθούν τα σημεία τομής με τους άξονες κα να χαρακτηί η (C).

3. Να δειχτεί ότι η (D) είναι εφαπτόμενη της (C) σε κάποιο σημείο της.

4. Να δειχτεί ότι η (3) ισχύει για όλες τις συναρτήσεις που προκύπτουν από την $F(x)$ για $\mu \neq 0$.